VISIT…

LANZAROTE
Caliente.COM

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

КЛАССИКИ НАУКИ



С. В. КОВАЛЕВСКАЯ

НАУЧНЫЕ РАБОТЫ



РЕДАКЦИЯ И КОММЕНТАРИИ
ЧЛЕНА-КОРРЕСПОНДЕНТА АН СССР
П. Я. ПОЛУБАРИНОВОЙ-КОЧИНОЙ



ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
1948

Под общей редакцией Комиссии Академии Наук СССР
по изданию научно-популярной литературы

Председатель Комиссии Президент Академии Наук СССР
академик *С. И. ВАВИЛОВ*

Зам. Председателя член-корреспондент Академии Наук СССР
П. Ю. ЮДИН


НАУЧНЫЕ РАБОТЫ
С.В.КОВАЛЕВСКАЯ



К ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ *

ВВЕДЕНИЕ

Дано алгебраическое дифференциальное уравнение

$$G\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0 \qquad (1)$$

где G обозначает целую рациональную функцию независимой переменной x, величины y, определяемой как функция этой независимой переменной, и ее производных по x до n-го порядка включительно.

Аналитическая функция полностью определяется, как только задана какая-нибудь регулярная ветвь ее [1]. ** Задача, следовательно, сводится к определению в самом общем виде степенного ряда

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu \frac{(x-a)^\nu}{\nu!}$$

* Эта статья появилась одновременно как вступительная диссертация на соискание докторской степени на философском факультете в Геттингене.

** Цифры обозначают номера ссылок в Приложении, относящемся к данной статье. В приложении VI, стр. 312, указано, где были опубликованы научные работы С. В. Ковалевской. *Прим. ред.*

где a, b_0, $b_1, \ldots$ обозначают постоянные, таким образом, чтобы он, будучи подставлен вместо y, удовлетворял заданному дифференциальному уравнению и сходился внутри некоторого круга, окружающего точку a.

Следовательно, при подстановке этого ряда вместо y в выражение

$$G\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right)$$

и при разложении последнего по степени $x-a$ каждый отдельный коэффициент этого разложения должен обратиться в нуль.

Таким образом, прежде всего, мы получаем уравнение между a, b_0, $b_1, \ldots, b_n$

$$G(a, b_0, b_1, \ldots, b_n) = 0 \tag{2}$$

Затем, если y является какой-нибудь регулярной функцией [1] от x, будем иметь для производной λ-го порядка от

$$G\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right)$$

выражение

$$G'\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right)\frac{d^{n+\lambda} y}{dx^{n+\lambda}} + H_\lambda\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n+\lambda-1} y}{dx^{n+\lambda-1}}\right)$$

где G' обозначает частную производную от G по $\frac{d^n y}{dx^n}$, а H_λ — целую рациональную функцию от

$$x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n+\lambda-1} y}{dx^{n+\lambda-1}}$$

Следовательно (для $\lambda = 1, 2, \ldots, \infty$), должно быть

$$G'(a, b_0, b_1, \ldots, b_n) b_{n+\lambda} + H_\lambda(a, b_0, b_1, \ldots, b_{n+\lambda-1}) = 0 \tag{3}$$

так как должен обращаться в нуль коэффициент при $(x-a)^\lambda$ в указанном разложении в ряд выражения

$$G\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ldots,\frac{d^ny}{dx^n}\right)$$

Обратно, принятое для y разложение в ряд будет формально удовлетворять уравнению (1), если будут выполняться уравнение (2) и все уравнения (3).

Но по уравнениям (3) однозначно определятся коэффициенты b_ν, индекс которых $>n$, как только будут заданы $a,\ b_0,\ b_1,\ldots,b_n$, причем в то же время $G'(a,\ b_0,\ b_1,\ldots,b_n)$ будет иметь отличное от нуля значение.

Таким образом, получаем теорему:

„Если выбрать постоянные

$$a,\ b_0,\ b_1,\ldots,b_n$$

произвольно, однако так, что уравнение

$$G(a,\ b_0,\ b_1,\ldots,b_n)=0$$

будет иметь простой корень b_n, то величины

$$b_{n+1},\ b_{n+2},\ldots$$

могут всегда быть определены однозначно таким образом, что

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu \frac{(x-a)^\nu}{\nu!}$$

будучи подставлена вместо y, будет *формально* удовлетворять уравнению (1) *."

---

* Эта теорема впервые была дана *Вейерштрассом* (2) в статье „Zur Theorie der analytischen Facultäten" (Crellés Journal, Bd 51, S. 43) и вскоре после этого была доказана *Брио* и *Буке* (Briot et Bouquet. Journal de l'Ecole polytechnique, cah. 36). Она сохраняет силу, если выражение, стоящее в левой части уравнения (1), представляет собой однозначную функцию, разлагающуюся во всюду сходящийся степенной ряд по степеням величин

$$x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ldots,\frac{d^ny}{dx^n}.$$

Но этот ряд всегда сходится внутри определенной области и представляет, если брать x внутри этой области, функцию, удовлетворяющую заданному дифференциальному уравнению. Из каждого такого ряда получится тогда определенная (однозначная или многозначная) аналитическая функция, каждая регулярная ветвь которой также будет удовлетворять заданному дифференциальному уравнению.

Обратно, всякая аналитическая функция y, удовлетворяющая заданному дифференциальному уравнению, имеет бесконечное число регулярных ветвей, определяемых вышеуказанным способом, если она не является так называемым особым решением дифференциального уравнения, т. е. удовлетворяет, кроме последнего, еще уравнению

$$G'\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

В этом случае можно путем комбинирования обоих уравнений

$$G = 0, \quad G' = 0 \tag{4}$$

получить для определения функции y либо алгебраическое уравнение, либо дифференциальное уравнение, для которого она не будет являться особым решением.

Далее, аналогичные теоремы имеют место, если для определения нескольких функций одной независимой переменной задана система такого же числа алгебраических дифференциальных уравнений.

Эта система всегда может быть приведена к виду

$$\begin{array}{l} G'(x,\ y_0,\ y_1, \ldots, y_n)\dfrac{dy_1}{dx} - G_1(x,\ y_0,\ y_1, \ldots, y_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ G'(x,\ y_0,\ y_1, \ldots, y_n)\dfrac{dy_n}{dx} - G_n(x,\ y_0,\ y_1, \ldots, y_n) = 0 \end{array} \tag{5}$$

где $y_1, \ldots, y_n$ обозначают подлежащие определению функции,

y_0 — вспомогательную величину, связанную с x, $y_1, \ldots, y_n$ неприводимым алгебраическим уравнением

$$G(x, y_0, y_1, \ldots, y_n) = 0 \tag{6}$$

G, $G_1, \ldots, G_n$ — целые рациональные функции от x, y_0, $y_1, \ldots, y_n$, G' — частную производную от G по y_0 *.

Положим теперь для $\lambda = 0, 1, \ldots, n$

$$y_\lambda = \sum_{\mu=0}^{\infty} b_{\lambda\mu} \frac{(x-a)^\mu}{\mu!} \tag{7}$$

и возьмем

$$a, \; b_{10}, \; b_{20}, \ldots, b_{n0}$$

такими, чтобы уравнение

$$G(a, b_{00}, b_{10}, \ldots, b_{n0}) = 0$$

решенное относительно b_{00}, имело конечный простой корень, и принимаем его за b_{00}; тогда, разлагая выражения, стоящие в левой части уравнений (5), (6), по степеням $x - a$ и полагая коэффициенты отдельных степеней равными нулю, определим однозначно величины

$$\begin{array}{l} b_{01}, \; b_{02}, \ldots \\ b_{11}, \; b_{12}, \ldots \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ b_{n1}, \; b_{n2}, \ldots \end{array}$$

таким образом, чтобы уравнения (5), (6) *формально* удовлетворялись.

---

*Каким образом можно каждую систему алгебраических дифференциальных уравнений привести к этому „каноническому“ виду, показывает *Якоби* в статьях „De investigando ordine systematis differentialium vulgarium cujuscunque“ (Borchardt's Journal, Bd 64, S. 237) и „De aequationum differentialium systemate non normali ad formam normalem revocanda“ (Vorlesungen über Dynamik, Anhang, S. 550).

Но тогда полученные так $n+1$ рядов (7) также будут всегда сходящимися внутри определенной области и представят собой, если ограничить x этой областью, систему из $n+1$ функций, которые действительно будут удовлетворять рассматриваемым здесь уравнениям.

Из этой системы получится тогда система (однозначных или многозначных) аналитических функций, обладающих тем свойством, что каждые $n+1$ соответствующие регулярные ветви этих функций также будут удовлетворять уравнениям (5), (6).

Обратно, если система из $n+1$ аналитических функций удовлетворяет уравнениям (5), (6), но не удовлетворяет одновременно уравнению

$$\frac{\partial G(x, y_0, y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_0} = 0$$

(т. е. если последняя не является особым решением системы уравнений в частных производных), то тогда, если только будут исключены специальные значения a, каждая система соответствующих элементов* этих функций может быть представлена в виде рядов, составленных вышеописанным способом.

Но особые решения мы получаем, комбинируя вышеприведенные уравнения (5), (6) с уравнением

$$\frac{\partial G(x, y_0, y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_0} = 0$$

Эти теоремы в приведенной формулировке взяты мною из лекций моего уважаемого учителя господина *Вейерштрасса*. В настоящей работе я занимаюсь исследованием вопроса о том, можно ли вообще и как далеко можно эти теоремы распространить на тот случай, когда для определения аналитических функций многих переменных даются алгебраические дифференциальные уравнения в частных производных.

---

* См. § III вначале.

§ I

Рассмотрим сначала следующую систему дифференциальных уравнений с частными производными, в которых $x, x_1, \ldots, x_r$ обозначают независимые переменные и $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — подлежащие определению функции последних, а $G_{\alpha\beta}^{(\gamma)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ являются заданными функциями от $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, представленными в форме обыкновенных, сходящихся внутри некоторой области степенных рядов: (1)

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = \sum_{\beta=1}^{n} G_{1\beta}^{(1)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_1} + \ldots + \sum_{\beta=1}^{n} G_{r\beta}^{(1)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_r}$$

. . . .

$$\frac{\partial\varphi_n}{\partial x} = \sum_{\beta=1}^{n} G_{1\beta}^{(n)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_1} + \ldots + \sum_{\beta=1}^{n} G_{r\beta}^{(n)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_r}$$

Для краткости изложения будем в последующем подразумевать под степенным рядом многих переменных $(x, x_1, \ldots, x_r)$ всегда такой ряд, который содержит только целые и положительные степени этих величин.

При таком предположении будут иметь место следующие теоремы.

А. Если

$$\varphi(x_1, \ldots, x_r)_{10}, \ldots, \varphi(x_1, \ldots, x_r)_{n0}$$

суть n произвольно взятых степенных ряда, обладающих общей, хотя бы и ограниченной областью сходимости, и в точке

$$(x_1=0,\ x_2=0, \ldots, x_r=0)$$

все обращаются в нуль, то имеется n определенных степенных рядов от $(x, x_1, \ldots, x_r)$, которые при $x=0$ переходят соответственно в

$$\varphi(x_1, \ldots, x_r)_{10}, \ldots, \varphi(x_1, \ldots, x_r)_{n0}$$

и при подстановке их вместо $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ в заданные дифференциальные уравнения *формально* им удовлетворяют.

B. Все эти n рядов сходятся безусловно [3] в некоторой области и представляют функции, которые действительно удовлетворяют дифференциальным уравнениям (1).

Подставляя в уравнения (1) вместо $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ряды вида

$$\varphi_1 = \varphi(x_1, \ldots, x_r)_{10} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi(x_1, \ldots, x_r)_{1\nu} \frac{x^\nu}{\nu!}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_n = \varphi(x_1, \ldots, x_r)_{n0} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi(x_1, \ldots, x_r)_{n\nu} \frac{x^\nu}{\nu!}$$

получим, разлагая в ряд по степеням x выражения, стоящие в обеих частях каждого уравнения, сначала

$$\varphi(x_1, \ldots, x_r)_{11} = \sum_{\beta=1}^{n} G_{1\beta}^{(1)}(\varphi_{10}, \ldots, \varphi_{n0}) \frac{\partial \varphi_{\beta 0}}{\partial x_1} + \ldots + \sum_{\beta=1}^{n} G_{r\beta}^{(1)}(\varphi_{10}, \ldots, \varphi_{n0}) \frac{\partial \varphi_{\beta 0}}{\partial x_r}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi(x_1, \ldots, x_r)_{n1} = \sum_{\beta=1}^{n} G_{1\beta}^{(n)}(\varphi_{10}, \ldots, \varphi_{n0}) \frac{\partial \varphi_{\beta 0}}{\partial x_1} + \ldots + \sum_{\beta=1}^{n} G_{r\beta}^{(n)}(\varphi_{10}, \ldots, \varphi_{n0}) \frac{\partial \varphi_{\beta 0}}{\partial x_r}$$

и затем каждую из функций

$$\varphi(x_1, \ldots, x_r)_{1\nu}, \quad \ldots, \quad \varphi(x_1, \ldots, x_r)_{n\nu}$$

представленную в виде целой рациональной функции от известного числа производных от $\varphi_{10}, \ldots, \varphi_{n0}$ по $x_1, \ldots, x_r$, коэффициенты которых являются степенными рядами от $\varphi_{10}, \ldots, \varphi_{n0}$. При этом надо отметить, что каждый коэффициент

последних составляется из конечного числа коэффициентов от выражений $G_{\alpha\beta}^{(\gamma)}$ посредством лишь сложения и умножения.

Имея теперь

$$\varphi(x_1, \ldots, x_r)_{10} = \sum_{\nu_1=0,\ldots,\infty,\;\ldots,\;\nu_r=0,\ldots,\infty} \left(\varphi_{0\nu_1\ldots\nu_r}^{(1)} \frac{x_1^{\nu_1}}{\nu_1!} \cdots \frac{x_r^{\nu_r}}{\nu_r!}\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2)$$

$$\varphi(x_1, \ldots, x_r)_{n0} = \sum_{\nu_1=0,\ldots,\infty,\;\ldots,\;\nu_r=0,\ldots,\infty} \left(\varphi_{0\nu_1\ldots\nu_r}^{(n)} \frac{x_1^{\nu_1}}{\nu_1!} \cdots \frac{x_r^{\nu_r}}{\nu_r!}\right)$$

и подставляя

$$\varphi(x_1, \ldots, x_r)_{\alpha\nu} = \sum_{\nu_1=0,\ldots,\infty,\;\ldots,\;\nu_r=0,\ldots,\infty} \left(\varphi_{\nu\nu_1\ldots\nu_r}^{(\alpha)} \frac{x_1^{\nu_1}}{\nu_1!} \cdots \frac{x_r^{\nu_r}}{\nu_r!}\right) \quad (\alpha=1,\ldots,n) \qquad (3)$$

получим каждую из величин

$$\varphi_{\nu\nu_1\ldots\nu_r}^{(\alpha)} \qquad (\alpha=1,\ldots,n)$$

в виде целой рациональной функции конечного числа величин

$$\varphi_{0\mu_1\ldots\mu_r}^{(\alpha)} \qquad (\alpha=1,\ldots,n)$$

и коэффициентов функций

$$G_{\alpha\beta}^{(\gamma)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$$

и тогда заданные дифференциальные уравнения будут формально удовлетворяться, если положить

$$\varphi_\alpha = \sum_{\mu=0,\ldots,\infty} \left(\varphi(x_1, \ldots, x_r)_{\alpha\mu} \frac{x^\mu}{\mu!}\right)$$

$$(\alpha=1,\ldots,n) \qquad (4)$$

$$\varphi_\alpha = \sum_{\mu=0,\ldots,\infty,\;\mu_1=0,\ldots,\infty,\;\ldots,\;\mu_r=0,\ldots,\infty} \left(\varphi_{\mu\mu_1\ldots\mu_r}^{(\alpha)} \frac{x^\mu}{\mu!} \frac{x_1^{\mu_1}}{\mu_1!} \cdots \frac{x_r^{\mu_r}}{\mu_r!}\right)$$

Чтобы теперь доказать, что все эти ряды безусловно сходятся внутри определенной области, я заменяю заданную систему дифференциальных уравнений другой системой такой же формы: (5)

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x}=\sum_{\beta=1}^{n}\overline{G}_{1\beta}^{(1)}(\psi_1,\ldots,\psi_n)\frac{\partial\psi_\beta}{\partial x_1}+\ldots+\sum_{\beta=1}^{n}\overline{G}_{r\beta}^{(1)}(\psi_1,\ldots,\psi_n)\frac{\partial\psi_\beta}{\partial x_r}$$

. . . .

$$\frac{\partial\psi_n}{\partial x}=\sum_{\beta=1}^{n}\overline{G}_{1\beta}^{(n)}(\psi_1,\ldots,\psi_n)\frac{\partial\psi_\beta}{\partial x_1}+\ldots+\sum_{\beta=1}^{n}\overline{G}_{r\beta}^{(n)}(\psi_1,\ldots,\psi_n)\frac{\partial\psi_\beta}{\partial x_r}$$

в которой в каждом из рядов $\overline{G}_{\alpha\beta}^{(\gamma)}(\psi_1,\ldots,\psi_n)$ каждый отдельный коэффициент положителен и не меньше, чем абсолютная величина соответствующего коэффициента в $G_{\alpha\beta}^{(\gamma)}(\psi_1,\ldots,\psi_n)$.

Одновременно я беру вместо каждого из рядов $\varphi(x_1,\ldots,x_r)_{\alpha 0}$ $(\alpha=1,\ldots,n)$ другой ряд $\psi(x_1,\ldots,x_r)_{\alpha 0}$, в котором каждый коэффициент положителен и не меньше, чем абсолютная величина соответствующего коэффициента в $\varphi(x_1,\ldots,x_r)_{\alpha 0}$.

Если затем обозначить через

$$\psi_{\mu\mu_1\ldots\mu_r}^{(\alpha)}$$

то выражение, которое входит теперь вместо

$$\varphi_{\mu\mu_1\ldots\mu_r}^{(\alpha)}$$

то из того, что было сказано относительно составления последнего из коэффициентов рядов $G_{\alpha\beta}^{(\gamma)}$ и $\psi_{\alpha 0}$, ясно, что первый будет положительным и не меньше, чем абсолютная величина другого. Таким образом, относительно рядов $\psi_1,\ldots,\psi_n$, где

$$\psi_\alpha=\sum\left(\psi_{\mu\mu\ldots\mu_r}^{(\alpha)}\frac{x^\mu}{\mu!}\frac{x_1^{\mu_1}}{\mu_1!}\cdots\frac{x_r^{\mu_r}}{\mu_r!}\right)\qquad(\alpha=1,\ldots,n)$$

$$\mu=0,\ldots,\infty,\ \mu_1=0,\ldots,\infty,\ \ldots,\ \mu_r=0,\ldots,\infty$$

можно доказать, что они все сходятся внутри определенной области, так что то же самое будет и для рядов $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$.

Сделав такое предположение, выберем, что всегда возможно, некоторую положительную величину g так, чтобы все ряды $G_{\alpha\beta}^{(\gamma)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ были сходящимися при

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi = g$$

тогда можно выбрать вторую, также положительную, величину G таким образом, что из дроби [4]

$$\frac{G}{1 - \dfrac{\psi_1 + \psi_2 + \ldots + \psi_n}{g}}$$

при ее разложении в ряд по возрастающим степеням $\psi_1, \ldots, \psi_n$ получится ряд $\overline{G}(\psi_1, \ldots, \psi_n)$, в котором каждый отдельный коэффициент будет положителен и по своей величине больше, чем абсолютная величина соответствующего коэффициента в каждом из рядов $G_{\alpha\beta}^{(\gamma)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$.

Точно так же можно выбрать две положительные величины g' и ρ так, чтобы в ряде, происходящем от разложения дроби

$$\frac{g'(x_1 + x_2 + \ldots + x_r)}{1 - \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_r}{\rho}}$$

по возрастающим степеням $x_1, \ldots, x_\rho$, который мы можем обозначить через $\psi(x_1, \ldots, x_r)_0$, каждый коэффициент был положителен и больше абсолютного значения соответствующих коэффициентов в каждом из рядов

$$\varphi(x_1, \ldots, x_r)_{10}, \quad \ldots \quad , \varphi(x_1, \ldots, x_r)_{n0}$$

Если затем в системе (5) положить все ряды равными

$$\overline{G}_{\alpha\beta}^{(\gamma)}(\psi_1, \ldots, \psi_n) = \overline{G}(\psi_1, \ldots, \psi_n)$$

и одновременно принять, что при $x = 0$ каждая из функций ψ_α должна перейти в

$$\psi(x_1, \ldots, x_r)_0$$

то будут удовлетворяться заданные условия, и таким образом остается доказать, что определенные таким путем ряды $\psi_1, \ldots, \psi_n$ будут сходящимися внутри некоторой области.

Но при сделанных предположениях все ряды $\psi_1, \ldots, \psi_n$ равны один другому и являются функциями только x и

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_r}{\rho}$$

Следовательно, система (5) при подстановке

$$\psi=\frac{\psi_1+\cdots+\psi_n}{g}, \qquad y=\frac{x_1+\cdots+x_r}{\rho}$$

так что $\psi_\alpha=\frac{g}{n}\psi$ (для $\alpha=1, \ldots, n$), сведется к одному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{a}{1-\psi}\frac{\partial\psi}{\partial y} \tag{6}$$

где a обозначает положительную постоянную.

К этому еще присоединяется условие, что ψ при $x=0$ должно перейти в

$$\frac{by}{1-y}$$

где b также обозначает постоянную.

Из уравнения (6) следует только то, что между величинами ψ и $(1-\psi)y+ax$ существует некоторая зависимость. Но в предположении, что ψ при $x=0$ должно перейти в

$$\frac{by}{1-y}$$

она становится вполне определенной, и связь между ψ, x, y представляется тогда уравнением

$$(1-\psi)y+ax=\frac{1-\psi}{b+\psi}\psi$$

откуда получаем

$$\psi=\frac{1-(1-b)y-ax-\sqrt{(1-(1+b)y-ax)^2-4abx}}{2(1-y)}$$

при условии, что при разложении этого выражения в ряд по степеням x, y первый член разложения в ряд квадратного корня будет равен единице.

Получившийся таким путем степенной ряд от x, y имеет определенную область сходимости, и вместе с тем все его коэффициенты будут всюду положительны; это сразу же может быть обнаружено разложением в ряд ψ приведенным выше методом. Поэтому и степенной ряд по $(x, x_1, \ldots, x_r)$, в который переходит ψ при подстановке

$$y = \frac{x_1 + \ldots + x_r}{\rho}$$

должен обладать определенной областью сходимости. Тогда, наверное, и все ряды $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ будут безусловно сходящимися для каждой системы значений $(x, x_1, \ldots, x_r)$, лежащей внутри этой области. Следовательно, эти ряды должны во всяком случае обладать общей областью сходимости. И если переменные $(x, x_1, \ldots, x_r)$ ограничить областью, лежащей внутри последней, так, чтобы для каждой лежащей в этой области системы значений $(x, x_1, \ldots, x_r)$ система соответствующих значений $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ принадлежала общей области сходимости рядов $G^{(\gamma)}_{\alpha\beta}$, то эти ряды будут функциями от $(x, x_1, \ldots, x_r)$, которые удовлетворяют заданным дифференциальным уравнениям и вместе с тем при $x = 0$ переходят в

$$\varphi(x_1, \ldots, x_r)_{10}, \ \ldots, \ \varphi(x_1, \ldots, x_r)_{n0}$$

ч. и т. д.

Дополнения

A) Было принято, что $\varphi(x_1, \ldots, x_r)_{10}, \ldots, \varphi(x_1, \ldots, x_r)_{n0}$ все обращаются в нуль, когда каждая из величин $(x, x_1, \ldots, x_r)$ обращается в нуль. Однако выведенные теоремы сохраняют свою силу и в том случае, если функции $\varphi_{\alpha 0}$ принимаются только такими, что система значений

$$\varphi(0, \ldots, 0)_{10}, \ \ldots, \ \varphi(0, \ldots, 0)_{n0}$$

будет лежать в общей области сходимости рядов $G_{\alpha\beta}^{(\gamma)}$; это без затруднений можно вывести из приведенного доказательства, если ввести

$$\varphi_1 - \varphi(0, \ldots, 0)_{10}, \ \ldots, \ \varphi_n - \varphi(0, \ldots, 0)_{n0}$$

в качестве подлежащих определению функций.

В) Далее, все выведенные выше теоремы сохраняют свою силу, когда вместо рассмотренной системы дифференциальных уравнений задается такая система, в которой все функции $G_{\alpha\beta}^{(\gamma)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ обладают тем же свойством, что и в первой системе, а именно,

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = \sum \left(G_{\nu\beta}^{(1)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_\nu}\right) + G_{00}^{(1)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \\
\nu = 1, \ldots, r, \quad \beta = 1, \ldots, n \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1a) \\
\frac{\partial\varphi_n}{\partial x} = \sum \left(G_{\nu\beta}^{(n)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_\nu}\right) + G_{00}^{(n)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \\
\nu = 1, \ldots, r, \quad \beta = 1, \ldots, n
\end{gathered}$$

Это сразу же получится, если добавить к вышеприведенным уравнениям еще одно уравнение

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial x} = 0$$

и принять, что для $x = 0$ должно быть

$$\varphi_0 = x_1$$

так что каждый член $G_{00}^{(p)}$ может быть умножен на $\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_1}$; таким путем получится система уравнений вида (1).

С) Затем рассматриваемые здесь теоремы сохраняют свою силу и тогда, когда в системах уравнений (1) и (1а) все функции $G_{\alpha\beta}^{(\gamma)}$ или часть их являются отношениями двух сте-

пенных рядов. В этом случае надо только выбрать систему значений

$$\varphi(0, \ldots, 0)_{10}, \; \ldots, \; \varphi(0, \ldots, 0)_{n0}$$

таким образом, чтобы последняя лежала в общей области сходимости всех числителей и знаменателей и чтобы ни один из знаменателей не обращался в нуль при подстановке

$$\varphi_1 = \varphi(0, \ldots, 0)_{10}, \; \ldots, \; \varphi_n = \varphi(0, \ldots, 0)_{n0}$$

Если эти условия выполнены, то все функции $G^{(\gamma)}_{\alpha\beta}$ можно будет разложить в степенные ряды по

$$\varphi_1 - \varphi(0, \ldots, 0)_{10}, \ldots, \; \varphi_n - \varphi(0, \ldots, 0)_{n0}$$

и, следовательно, системе уравнений будет дана первоначально предположенная форма.

D) Если теперь мы обратим внимание на то, что получившиеся при помощи рассмотренного выше способа ряды для $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ являются вполне определенными, что они удовлетворяют заданным дифференциальным уравнениям и при $x=0$ должны соответственно перейти в

$$\varphi(x_1, \ldots, x_r)_{10}, \; \ldots, \; \varphi(x_1, \ldots, x_r)_{n0}$$

то мы придем, наконец, суммируя все вышесказанное, к следующему результату:

Пусть дана система дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$G^{(1)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \sum \left(G^{(1)}_{\alpha\beta}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_\alpha}\right) + G^{(1)}_{00}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$$
$$(\alpha = 1, \ldots, r, \;\; \beta = 1, \ldots, n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1b)$$
$$G^{(n)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} = \sum \left(G^{(n)}_{\alpha\beta}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_\alpha}\right) + G^{(n)}_{00}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$$
$$(\alpha = 1, \ldots, r, \;\; \beta = 1, \ldots, n)$$

в которых все $G_{\alpha\beta}^{(\gamma)}$ и $G^{(\gamma)}$ представляют собой степенные ряды от $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, и пусть каким-нибудь образом составлены n степенных рядов от $x, x_1, \ldots, x_r$

$$\varphi_1(x, x_1, \ldots, x_r), \quad \ldots \quad, \varphi_n(x, x_1, \ldots, x_r)$$

которые, будучи подставлены вместо $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, будут формально удовлетворять дифференциальным уравнениям, так что в каждом из этих уравнений выражения, стоящие в правой и левой частях, при их разложении в ряды по степеням $x, x_1, \ldots, x_r$ будут иметь одинаковые коэффициенты при одинаково расположенных членах; тогда эти ряды будут всегда сходиться внутри определенной области и представлять собой аналитические функции, действительно удовлетворяющие дифференциальным уравнениям, если только будут выполняться следующие условия:

a) ряды

$$\varphi(0, x_1, \ldots, x_r)_1, \quad \ldots \quad, \varphi(0, x_1, \ldots, x_r)_n$$

должны обладать общей областью сходимости;

b) система значений

$$\varphi(0, 0, \ldots, 0)_1, \quad \ldots \quad, \varphi(0, 0, \ldots, 0)_n$$

должна лежать внутри общей области сходимости функций

$$G_{\alpha\beta}^{(\gamma)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n), \qquad G^{(\gamma)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$$

c) ни одна из функций $G^{(\gamma)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ не должна обращаться в нуль в точке

$$(\varphi_1 = \varphi(0, \ldots, 0)_1, \quad \ldots \quad, \varphi_n = \varphi(0, \ldots, 0)_n)$$

Если, в частности, все $G_{\alpha\beta}^{(\gamma)}$, $G^{(\gamma)}$ являются целыми функциями или сходящимися рядами от $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, то условие b) удовлетворяется само собой.

§ II

Теперь я принимаю, что для определения функции φ от $r+1$ переменных $(x, x_1, \ldots, x_r)$ дано алгебраическое дифференциальное уравнение с частными производными n-го порядка, приведенное к следующему виду

$$G\left(x, x_1, \ldots, x_r, \varphi, \ldots, \frac{\partial^{\alpha+\alpha_1+\ldots+\alpha_r}\varphi}{\partial x^{\alpha}\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_r^{\alpha_r}}, \ldots\right)=0 \qquad (1)$$

где G обозначает целую рациональную функцию от $x, x_1, \ldots, x_r, \varphi$ и тех ее производных

$$\frac{\partial^{\alpha+\alpha_1+\ldots+\alpha_r}\varphi}{\partial x^{\alpha}\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_r^{\alpha_r}}$$

в которых

$$\alpha+\alpha_1+\ldots+\alpha_r \leqq n$$

При этом можно предположить, что это уравнение является неприводимым в том смысле, что G не может быть представлено в виде произведения двух выражений одного и того же вида.

Задача заключается здесь в определении самым общим образом *функционального элемента*

$$\varphi(x, x_1, \ldots, x_r \,|\, a, a_1, \ldots, a_r)$$

(в том смысле, в каком употребляет это слово господин *Вейерштрасс*), а именно степенного ряда от $x-a, x_1-a_1, \ldots, x_r-a_r$, где $a, a_1, \ldots, a_r$ обозначают постоянные, сходящегося внутри определенной области и удовлетворяющего дифференциальному уравнению.

Я рассматриваю теперь сначала случай, который я буду называть *нормальным*, когда из производных

$$\frac{\partial^n\varphi}{\partial x^n}, \frac{\partial^n\varphi}{\partial x_1^n}, \ldots, \frac{\partial^n\varphi}{\partial x_r^n}$$

по крайней мере одна — пусть, например, $\frac{\partial^n\varphi}{\partial x^n}$ — действительно входит в G.

Сделав такое предположение, мы покажем, что можно получить удовлетворяющий дифференциальному уравнению ряд

$$\varphi(x, x_1, \ldots, x_r \mid a, a_1, \ldots, a_r) =$$

$$= \sum \left(b_{\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_r} \frac{(x-a)^\alpha}{\alpha!} \frac{(x_1-a_1)^{\alpha_1}}{\alpha_1!} \ldots \frac{(x_r-a_r)^{\alpha_r}}{\alpha_r!} \right)$$

$$(\alpha=0, \ldots, \infty, \alpha_1=0, \ldots, \infty, \ldots, \alpha_r=0, \ldots, \infty)$$

в котором, при его приведении к виду

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \overset{(\nu)}{\varphi} (x_1, \ldots, x_r \mid a_1, \ldots, a_r) \frac{(x-a)^\nu}{\nu!}$$

из функций $\overset{(\nu)}{\varphi} (x_1, \ldots, x_r \mid a_1, \ldots, a_r)$ первые n

$$\overset{(0)}{\varphi}(x_1, \ldots, x_r \mid a_1, \ldots, a_r), \ldots, \overset{(n-1)}{\varphi} (x_1, \ldots, x_r \mid a_1, \ldots, a_r)$$

вообще могут быть взяты произвольно, а остальные определятся тогда дифференциальным уравнением.

При подстановке взятых для φ рядов в выражение, стоящее в левой части уравнения (1), и при разложении последнего по степеням $x-a, x_1-a_1, \ldots, x_r-a_r$ прежде всего обратится в нуль постоянный член, и мы получаем

$$G(a, a_1, \ldots, a_r, b_{0\ldots0}, \ldots, b_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_r}, \ldots) = 0 \qquad (2)$$

Далее обозначим для сокращения

$$\frac{\partial^{\alpha+\alpha_1+\cdots+\alpha_r} \varphi(x, x_1, \ldots, x_r \mid a, a_1, \ldots, a_r)}{\partial x^\alpha \partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_r^{\alpha_r}}$$

через $\varphi_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_r}$ и

$$\overset{(\nu)}{\varphi}(x_1, \ldots, x_r \mid a_1, \ldots, a_r)$$

просто через $\overset{(\nu)}{\varphi}$. Тогда при $x=a$

$$\varphi_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_r} \text{ будет равно } \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_r} \overset{(\alpha)}{\varphi}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_r^{\alpha_r}}$$

При разложении в ряд по степеням $x - a$

$$G(x, x_1, \ldots, x_r, \varphi, \ldots, \varphi_{\alpha\alpha_1, \ldots \alpha_r}, \ldots)$$

коэффициент при $(x-a)^0$ будет целой функцией от $\overset{(n)}{\varphi}$, коэффициенты которой будут содержать помимо переменных $x_1, \ldots, x_r$ только функции

$$\overset{(0)}{\varphi}, \overset{(1)}{\varphi}, \ldots, \overset{(n-1)}{\varphi}$$

и их производные по $(x_1, \ldots, x_r)$; при этом надо определить $\overset{(n)}{\varphi}$ таким образом, чтобы эта функция, которую мы обозначим через $G_0(\overset{(n)}{\varphi})$, обратилась в нуль и чтобы одновременно

$$\overset{(n)}{\varphi}$$

представляла степенной ряд от $x_1 - a_1, \ldots, x_r - a_r$. Это всегда возможно сделать и притом одним только единственным способом, если $a, a_1, \ldots, a_r$ и те величины $b_{\alpha\alpha_1 \ldots \alpha r}$, в которых

$$\alpha + \alpha_1 + \cdots + \alpha_r \leqslant n, \qquad \alpha < n$$

выбрать таким образом, чтобы из уравнения (2) получилось для $b_{n0 \ldots 0}$ по крайней мере одно конечное значение, которое будет являться простым корнем этого уравнения.

Предполагая это условие выполненным, мы можем выбрать теперь ряды

$$\overset{(0)}{\varphi}, \overset{(1)}{\varphi}, \ldots, \overset{(n-1)}{\varphi}$$

в остальном произвольно, но только так, чтобы каждый из них обладал областью сходимости. Коэффициенты ряда

$$\overset{(n)}{\varphi}$$

который тогда тоже будет обладать некоторой областью сходимости, составляются рационально из коэффициентов выше-

указанных рядов и из $b_{n0\ldots 0}$; следовательно, будет столько же различных функций

$$\overset{(n)}{\varphi}$$

сколько существует различных значений $b_{n0,\ldots 0}$, являющихся простыми корнями уравнения (2).

Дифференцируя затем выражение G, рассматривая его, как функцию от x, получим для λ-й производной последнего следующее выражение:

$$G'(\varphi_{n0\ldots 0})\frac{\partial^{n+\lambda}\varphi}{\partial x^{n+\lambda}}+H_\lambda(x, x_1, \ldots, x_r, \varphi, \ldots, \varphi_{\alpha\alpha_1\ldots,\ r}, \ldots)$$

где $G'(\varphi_{n0\ldots 0})$ является частной производной от G по $\varphi_{n0\ldots 0}$, а H_λ обозначает целую функцию от $x, x_1, \ldots, x_r$ и тех величин $\varphi_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_r}$, в которых

$$\alpha+\alpha_1+\ldots+\alpha_r\leqslant n+\lambda, \qquad \alpha<n+\lambda$$

Коэффициент при $\frac{(x-a)^\lambda}{\lambda!}$ в вышеупомянутом разложении в ряд выражения G имеет, следовательно, вид

$$G_0'(\overset{(n)}{\varphi})\overset{(n+\lambda)}{\varphi}+H_{\lambda 0}$$

где G_0' и $H_{\lambda 0}$ обозначают те функции от $x_1, \ldots, x_r$, в которые переходят G' и H_λ при подстановке $x=a$ и

$$\varphi_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_r}=\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_r}\overset{(\alpha)}{\varphi}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_r^{\alpha_r}}$$

Этот же коэффициент должен быть равным нулю, и так как

$$G_0'(\overset{(n)}{\varphi})$$

в точке $(x_1=a_1, \ldots, x_r=a_r)$ не обращается в нуль, то

$$\frac{1}{G_0'(\overset{(n)}{\varphi})}$$

может быть разложено в степенной ряд по $x_1 - a_1, \ldots, x_r - a_r$, и, следовательно,

$$\overset{(n+\lambda)}{\varphi}$$

представится в виде степенного ряда по $x_1 - a_1, \ldots, x_r - a_r$, который вполне определится, как только будут определены

$$\overset{(0)}{\varphi}, \overset{(1)}{\varphi}, \ldots, \overset{(n+\lambda-1)}{\varphi}$$

Отсюда следует, что, если выбрать

$$a, \quad a_1, \ldots, a_r, \overset{(0)}{\varphi}, \overset{(1)}{\varphi}, \ldots, \overset{(n-1)}{\varphi}$$

в соответствии с вышеупомянутыми условиями, после того как мы фиксируем коэффициенты $b_{n0\ldots 0}$, можно будет определить сначала

$$\overset{(n)}{\varphi}$$

и затем

$$\overset{(n+1)}{\varphi}, \overset{(n+2)}{\varphi}, \ldots$$

и притом единственным образом, и именно так, чтобы выражение

$$\varphi = \sum \overset{(\nu)}{\varphi}(x_1, \ldots, x_r \,|\, a_1, \ldots, a_r) \frac{(x-a)^\nu}{\nu!}$$

формально удовлетворило заданному дифференциальному уравнению.

Чтобы теперь доказать, что φ представляет собой элемент аналитической функции от $x, x_1, \ldots, x_r$, удовлетворяющей этому уравнению, надо показать, что он сходится внутри некоторой области. Это можно сделать следующим образом:

Я полагаю

$$x = a + u, \quad x_1 = a_1 + u_1, \ \ldots, \ x_r = a_r + u_r \tag{3}$$

и обозначаю, подразумевая теперь под φ степенной ряд от

$u, u_1, \ldots, u_r$, в который переходит $\varphi(x, x_1, \ldots, x_r \mid a, a_1, \ldots, a_r)$ при такой подстановке

$$\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial^n\varphi}{\partial u^n}$$

соответственно через

$$\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$$

и также через $\varphi_{n+1}, \ldots, \varphi_s$ остальные производные

$$\frac{\partial^{\alpha+\alpha_1+\cdots+\alpha_r}\varphi}{\partial x^\alpha \partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_r^{\alpha_r}}$$

в которых $\alpha+\alpha_1+\cdots+\alpha_r \leqslant n$, беря их в каком-нибудь определенном порядке. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial u} &= \varphi_1 \\ &\cdots\cdots \\ \frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial u} &= \varphi_n \end{aligned} \qquad (4)$$

Далее можно, если $\lambda > 0$, положить

$$\frac{\partial\varphi_{n+\lambda}}{\partial u} = \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial u_\nu} \qquad (5)$$

где μ одно из чисел $1, \ldots, s$, а ν одно из чисел $1, \ldots, r$.

(Если же $\varphi_{n+\lambda} = \varphi_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_r}$, то по крайней мере одно из чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, например α_ν, отлично от нуля, а тогда имеем

$$\frac{\partial\varphi_{n+\lambda}}{\partial u} = \frac{\partial\varphi_{\alpha+1,\,\alpha_1\ldots\alpha_\nu-1\,\ldots\alpha_r}}{\partial u_\nu}$$

и $\varphi_{\alpha+1,\,\alpha_1\ldots\alpha_\nu-1\,\ldots\alpha_r}$ равно одной из величин $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_s$.)

Если затем обозначить, подразумевая под G, как и раньше, выражение, стоящее в левой части уравнения (1), частные

производные последнего по x, φ_0, φ_1, ..., φ_s соответственно через

$$G'(x), \quad G'(\varphi_0), \quad G'(\varphi_1), \ldots, \quad G'(\varphi_s)$$

то получим

$$G'(\varphi_n)\frac{\partial\varphi_n}{\partial u} = -\left\{G'(x) + G'(\varphi_0)\frac{\partial\varphi_0}{\partial u} + \cdots + G'(\varphi_{n-1})\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial u} + \right.$$
$$\left. + G'(\varphi_{n+1})\frac{\partial\varphi_{n+1}}{\partial u} + \cdots + G'(\varphi_s)\frac{\partial\varphi_s}{\partial u}\right\}$$

Следовательно,

$$G'(\varphi_n)\frac{\partial\varphi_n}{\partial u} = -\sum_{\lambda=1}^{s-n}\left(G'(\varphi_{n+\lambda})\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial u_\nu}\right) - \sum_{\lambda=0}^{n-1}\left(G'(\varphi_\lambda)\varphi_{\lambda+1}\right) - G(x) \tag{6}$$

Наконец, имеем

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial x_1}{\partial u} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial x_r}{\partial u} = 0 \tag{7}$$

Уравнения (4), (5), (6), (7) образуют теперь для величин x, x_1, ..., x_r, φ_0, φ_1, ..., φ_s, которые все представляют собой степенные ряды от u, u_1, ..., u_r, систему дифференциальных уравнений с частными производными вида, рассмотренного в § I, дополнении D). А так как они, кроме того, удовлетворяют приведенным там под пунктами a) и c) условиям, то отсюда следует, что все они сходятся внутри определенной области.

Каждый составленный вышеприведенным способом степенной ряд

$$\varphi(x, x_1, \ldots, x_r \mid a, a_1, \ldots, a_r)$$

действительно является элементом аналитической функции, удовлетворяющей заданному дифференциальному уравнению.

Теперь остается еще выяснить, можно ли, обратно, и для каждой удовлетворяющей заданному дифференциальному уравнению аналитической функции φ получить вышеописанным способом определяющий ее элемент.

Пусть

$$\varphi(x, x_1, \ldots, x_r) = \sum_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_r} b_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_r} \frac{(x-a)^{\alpha}}{\alpha!} \frac{(x_1-a_1)^{\alpha_1}}{\alpha_1!} \cdots \frac{(x_r-a_r)^{\alpha_r}}{\alpha_r!}$$

есть любой элемент такой функции; тогда для последнего, при сохранении вышеуказанных обозначений, получаем уравнения

$$G_0(\overset{(n)}{\varphi}) = 0, \qquad G_0(\overset{(n)}{\varphi})\overset{(n+\lambda)}{\varphi} + H_{\lambda,0} = 0$$

Если теперь $b_{n0\ldots0}$ не является кратным корнем уравнения

$$G(a, a_1, \ldots, a_r, b_{0\ldots0}, \ldots, b_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_r}, \ldots, b_{n0\ldots0}) = 0$$

то этими уравнениями и условием, что $\overset{(n)}{\varphi}$ в точке $(x_1 = a_1, \ldots, x_r = a_r)$ получает значение $b_{n0\ldots0}$, вполне определяются

$$\overset{(n)}{\varphi}, \quad \overset{(n+1)}{\varphi}, \quad \overset{(n+2)}{\varphi}, \ldots$$

Но функция всегда обладает бесконечно большим числом элементов, для которых $b_{n0\ldots0}$ является простым корнем только что приведенного уравнения, если только эта функция не является так называемым особым решением дифференциального уравнения, т. е. помимо этого уравнения удовлетворяющей также уравнению

$$G'\left(\frac{\partial^n\varphi}{\partial x^n}\right) = 0$$

Этим доказано следующее.

Если φ является какой-нибудь аналитической функцией, удовлетворяющей заданному уравнению, но не удовлетворяющей уравнению

$$G'\left(\frac{\partial^n\varphi}{\partial x^n}\right) = 0$$

то каждый элемент

$$\varphi(x, x_1, \ldots, x_r \,|\, a, a_1, \ldots, a_r)$$

этой функции, для которого выражение $G'\left(\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}\right)$ имеет в точке $(x = a,\ x_1 = a_1,\ \ldots,\ x_r = a_r)$ отличное от нуля значение, может быть определен вышеописанным способом.

Но в том случае, когда функция φ является особым решением дифференциального уравнения, для нее получается путем комбинирования обоих уравнений

$$G = 0, \qquad G'\left(\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}\right) = 0$$

либо алгебраическое уравнение, либо дифференциальное уравнение с частными производными, которому она удовлетворяет, не являясь его особым решением.

§ III

Если заданное дифференциальное уравнение не имеет нормальной формы, то ему можно всегда придать таковую, вводя в качестве аргументов φ вместо величин $x, x_1, \ldots, x_r$ столько же линейных функций $(y, y_1, \ldots, y_r)$ от этих величин.

Именно, полагая

$$\begin{aligned}
y &= b + cx + c_1 x_1 + \cdots + c_r x_r \\
y_1 &= b' + c'x + c_1' x_1 + \cdots + c_r' x_r \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_r &= b^{(r)} + c^{(r)} x + c_1^{(r)} x_1 + \cdots + c_r^{(r)} x_r
\end{aligned}$$

где b, c обозначают постоянные, на которые наложено условие, что детерминант

$$\begin{vmatrix} c & c_1 & \ldots & c_r \\ c' & c_1' & \ldots & c_r' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c^{(r)} & c_1^{(r)} & \ldots & c_r^{(r)} \end{vmatrix}$$

не должен обращаться в нуль, тогда выражение

$$G(x, x_1, \ldots, x_r, \varphi, \ldots, \varphi_{\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_r}, \ldots)$$

можно преобразовать в другое той же формы

$$\bar{G}\left(y, y_1, \ldots, y_r, \varphi, \ldots, \frac{\partial^{\beta+\beta_1+\cdots+\beta_r}\varphi}{\partial y^{\beta}\partial y_1^{\beta_1}\ldots\partial y_r^{\beta_r}}, \ldots\right)$$

в которое, так же как и в G, входят только производные не свыше n-го порядка, и можно показать, что это выражение в общем случае, т. е. если исключить систему специальных значений постоянных $c, c_1, \ldots, c_r$, действительно содержит производную

$$\frac{\partial^n \varphi}{\partial y^n}$$

В этом легче всего убедиться следующим образом. Обозначая через

$$\varphi_{\alpha'\alpha_1' \ldots \alpha_r'}, \quad \varphi_{\alpha''\alpha_1'' \ldots \alpha_r''}, \quad \ldots \qquad \text{и т. д.}$$

входящие в G производные n-го порядка, получаем

$$\frac{\partial G}{\partial x} = G_0 + G_1\varphi_{\alpha'+1, \alpha_1' \ldots \alpha_r'} + G_2\varphi_{\alpha''+1, \alpha_1'' \ldots \alpha_r''} + \cdots$$

где $G_0, G_1, \ldots, G_p$ содержат только производные порядка ниже $n+1$. Но теперь имеем

$$\varphi_{\alpha'+1, \alpha_1' \ldots \alpha_r'} = c^{\alpha'+1} c_1^{\alpha_1'} \ldots c_r^{\alpha_r'} \frac{\partial^{n+1}\varphi}{\partial y^{n+1}} + \cdots$$

$$\varphi_{\alpha''+1, \alpha_1'' \ldots \alpha_r''} = c^{\alpha''+1} c_1^{\alpha_1''} \ldots c_r^{\alpha_r''} \frac{\partial^{n+1}\varphi}{\partial y^{n+1}} + \cdots,$$

где отброшенные члены содержат только такие производные

$$\frac{\partial^{\beta+\beta_1+\cdots+\beta_r}\varphi}{\partial y^{\beta}\partial y_1^{\beta_1}\ldots\partial y_r^{\beta_r}}$$

в которых $\beta+\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_r=n+1$, но $\beta<n+1$.

Таким образом, имеем

$$\frac{\partial G}{\partial x}=(G_1 c^{\alpha'+1}c_1^{\alpha_1'}\ldots c_r^{\alpha_r'}+$$

$$G_2 c^{\alpha''+1}c_1^{\alpha_1''}\ldots c_r^{\alpha_r''}+\ldots)\frac{\partial^{n+1}\varphi}{\partial y^{n+1}}+\cdots \text{ и т. д.}$$

где в отброшенных членах, после преобразования входящих в них производных от φ по $x, x_1, \ldots, x_r$ в производные по $y, y_1, \ldots, y_r$, не входит производная

$$\frac{\partial^{n+1}\varphi}{\partial y^{n+1}}$$

Выберем теперь постоянные $c, c_1, \ldots, c_r$ так, чтобы коэффициент при

$$\frac{\partial^{n+1}\varphi}{\partial y^{n+1}}$$

в предыдущем уравнении, рассматриваемый как функция от $x, x_1, \ldots, x_r, \ldots, \varphi_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_r}, \ldots$, не обращался тождественно в нуль, —что может иметь место только при особых системах значений $c, c_1, \ldots, c_r$, — то тогда этот коэффициент также не будет тождественно обращаться в нуль,если в него вместо переменных $x, x_1, \ldots, x_r$ ввести $y, y_1, \ldots, y_r$ и преобразовать производные $\varphi_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_r}$ в производные от φ по $y, y_1, \ldots, y_r$; таким образом, производная

$$\frac{\partial^{n+1}\varphi}{\partial y^{n+1}}$$

действительно входит.

Но мы имеем

$$\frac{\partial G}{\partial x} = c\frac{\partial G}{\partial y} + c_1\frac{\partial G}{\partial y_1} + \cdots + c_r\frac{\partial G}{\partial y_r}$$

и поэтому

$$\frac{\partial G}{\partial x}$$

преобразованная указанным способом, будет содержать производную

$$\frac{\partial^{n+1}\varphi}{\partial y^{n+1}}$$

только тогда, когда в G входит производная

$$\frac{\partial^n\varphi}{\partial y^n}$$

Взяв, в частности,

$$\begin{aligned} y &= x - a - c_1(x_1 - a_1) - \cdots - c_r(x_r - a_r) \\ y_1 &= x_1 - a_1 \\ &\cdots\cdots \\ y_r &= x_r - a_r \end{aligned}$$

мы видим, что при надлежащем выборе $c_1, \ldots, c_r$ функция φ всегда сможет быть разложена в ряд по степеням

$$x - a - c_1(x_1 - a_1) - \cdots - c_r(x_r - a_r), \quad x_1 - a_1, \ldots, \quad x_r - a_r$$

и что те функции, в которые переходят

$$\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^{n-1}\varphi}{\partial x^{n-1}}$$

при

$$x = a + c_1(x_1 - a_1) + \cdots + c_r(x_r - a_r)$$

в общем случае могут быть взяты произвольно в виде степенных рядов по $x_1 - a_1, \ldots, x_r - a_r$.

Описанное выше преобразование заданного дифференциального уравнения может оказаться ненужным в том случае, когда в это уравнение входит хотя и не n-я производная от φ по x, но некоторая другая

$$\frac{\partial^m \varphi}{\partial x^m} \quad (\text{где } m < n, \quad \text{но} > 0)$$

и, кроме того, $\alpha < m$ в остальных производных

$$\frac{\partial^{\alpha + \alpha_1 + \ldots + \alpha_r} \varphi}{\partial x^\alpha \partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_r^{\alpha_r}}$$

Это потому, что, положив, как и выше,

$$\varphi = \sum \overset{(\nu)}{\varphi} (x_1, \ldots, x_r \,|\, a_1, \ldots, a_r) \frac{(x-a)^\nu}{\nu!}$$

и разложив выражение в левой части уравнения по степеням $x - a$, мы прежде всего получим уравнение, связывающее

$$\overset{(0)}{\varphi}, \overset{(1)}{\varphi}, \ldots, \overset{(m)}{\varphi}$$

и известное число производных первых m этих функций по $x_1, \ldots, x_r$. Выберем затем ряды

$$\overset{(0)}{\varphi}, \overset{(1)}{\varphi}, \ldots, \overset{(m-1)}{\varphi}$$

произвольно, но так, что уравнение, в которое переходит только что упомянутое при подстановке $x_1 = a_1, \ldots, x_r = a_r$, разрешенное относительно

$$\overset{(m)}{\varphi}$$

имело бы конечный простой корень; тогда мы можем определить функцию

$$\overset{(m)}{\varphi}$$

в виде степенного ряда по $x_1 - a_1, \ldots, x_r - a_r$ так, что она будет удовлетворять первому уравнению и при $x_1 = a_1, \ldots, x_r = a_r$ перейдет в этот корень.

Остальные коэффициенты вышеупомянутого разложения дадут тогда для определения прочих функций

$$\overset{(m+\nu)}{\varphi}(x_1, \ldots, x_r \,|\, a_1, \ldots, a_r)$$

требуемые уравнения, которыми они будут все определяться, и притом однозначно.

Таким образом, тем же самым способом, как и выше, получается степенной ряд

$$\varphi(x, x_1, \ldots, x_r \,|\, a, a_1, \ldots, a_r)$$

который, будучи подставлен вместо φ, формально удовлетворяет заданному дифференциальному уравнению.

Но, как я заметила, для того, чтобы этот ряд был сходящимся, функции

$$\overset{(0)}{\varphi}, \ldots, \overset{(m-1)}{\varphi}$$

не могут быть взяты произвольно, но должны подчиняться таким ограничениям, что, вообще говоря, ряд

$$\varphi(x, x_1, \ldots, x_r \,|\, a, a_1, \ldots, a_r)$$

не будет сходиться *ни в какой* точке $(x, x_1, \ldots, x_r)$, как бы близко ни взять ее к точке $(a, a_1, \ldots, a_r)$.

Я ограничиваюсь здесь доказательством этого положения на отдельном примере (5).

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$

Если $\varphi_0(y \mid b)$ представляет собой какой-нибудь степенной ряд по $y-b$, то ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{d^{2\nu}\varphi_0(y \mid b)}{dy^{2\nu}} \frac{(x-a)^{\nu}}{\nu!}$$

формально удовлетворяет этому дифференциальному уравнению и переходит при $x=a$ в $\varphi_0(y \mid b)$; но он будет обладать областью сходимости только при совершенно особом выборе $\varphi_0(y \mid b)$, а вообще не имеет ни при какой системе значений (x, y) определенной конечной суммы.

Пусть, например, $a=0$, $b=0$ и

$$\varphi_0(y \mid b) = \frac{1}{1-y}$$

Тогда имеем

$$\frac{d^n\varphi}{dy^n} = \frac{n!}{(1-y)^{n+1}}$$

и вышеприведенный ряд переходит в

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{2\nu!}{\nu!} \frac{x^{\nu}}{(1-y)^{2\nu+1}}$$

из которого видно, что он будет расходящимся, какими бы малыми ни брались x, y.

Чтобы показать в общем случае, какому условию должна подчиняться функция $\varphi_0(y \mid b)$, чтобы существовал удовлетворяющий заданному дифференциальному уравнению элемент $\varphi(x, y \mid a, b)$, переходящий при $x=a$ в $\varphi_0(y \mid b)$, я замечу, что это дифференциальное уравнение имеет относительно переменной y нормальную форму; поэтому, если взять произвольно две функции

$$\overset{(0)}{\varphi}(x \mid a), \quad \overset{(1)}{\varphi}(x \mid a)$$

то можно согласно с вышеизложенным определить $\varphi(x, y \mid a, b)$ таким образом, что эта функция будет удовлетворять заданному дифференциальному уравнению и при $y = b$

$$\varphi(x, y \mid a, b)$$

перейдет в

$$\overset{(0)}{\varphi}(x \mid a)$$

а

$$\frac{\partial \varphi(x, y \mid a, b)}{\partial y}$$

перейдет в

$$\overset{(1)}{\varphi}(x \mid a)$$

Именно, поскольку в этом случае $\overset{(2)}{\varphi}(x \mid a)$ имеет только одно значение $\dfrac{\partial \overset{(0)}{\varphi}(x \mid a)}{\partial x}$, то в качестве *самого общего* выражения для $\varphi(x, y \mid a, b)$ получим

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\partial^{\nu} \overset{(0)}{\varphi}(x \mid a)}{\partial x^{\nu}} \frac{(y-b)^{2\nu}}{(2\nu)!} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\partial^{\nu} \overset{(1)}{\varphi}(x \mid a)}{\partial x^{\nu}} \frac{(y-b)^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}$$

Если теперь

$$\overset{(0)}{\varphi}(x \mid a) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu}(x-a)^{\nu}$$

и

$$\overset{(1)}{\varphi}(x \mid a) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu}'(x-a)^{\nu}$$

то получится

$$\varphi_0(y \mid b) = \varphi(a, y \mid a, b) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\nu!}{(2\nu)!} c_{\nu}(y-b)^{2\nu} +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\nu!}{(2\nu+1)!} c_{\nu}'(y-b)^{2\nu+1}$$

Обозначив теперь через ρ некоторую положительную величину, которая меньше, чем радиус общей области сходимости рядов $\overset{(0)}{\varphi}$, $\overset{(1)}{\varphi}$, и абсолютные величины c_ν, c_ν' через $|c_\nu|$, $|c_\nu'|$, мы сможем задаться такой положительной величиной g, что для каждого значения ν

$$|c_\nu| < g\rho^{-\nu}, \qquad |c_\nu'| < g\rho^{-\nu}$$

Следовательно, $\varphi_0(y\,|\,b)$ должна быть выбрана таким образом, чтобы для двух определенных величин g, ρ абсолютная величина коэффициента

при $(y-b)^{2\nu}$ была меньше, чем $\frac{\nu!}{(2\nu)!}g\rho^{-\nu}$

» $(y-b)^{2\nu+1}$ » » » $\frac{\nu!}{(2\nu)!}g\rho^{-\nu}$

Отсюда следует, что ряд

$$\sum \frac{d^{2\nu}\varphi_0(y\,|\,b)}{dy^{2\nu}} \frac{(x-a)^\nu}{\nu!}$$

никогда не будет сходящимся, какими бы малыми ни взять $x-a$, $y-b$, если ряд $\varphi_0(y\,|\,b)$ обладает только ограниченной областью сходимости. Но и тогда, когда $\varphi_0(y\,|\,b)$ является всюду сходящимся рядом, вышеприведенный ряд может быть всюду расходящимся. Это, например, будет иметь место в том случае, если мы положим

$$\varphi_0(y\,|\,b) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(y-b)^\nu}{(\nu!)^{1/3}}$$

так как тогда не будут удовлетворяться заданные условия для коэффициентов ряда $\varphi_0(y\,|\,b)$.

§ IV

Теперь я перехожу к тому случаю, когда для определения m функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ от $r+1$ переменных $(x, x_1, \ldots, x_r)$ задана система m алгебраических дифференциальных уравнений с частными производными, которая может быть n_λ-го порядка относительно φ_λ. Я предполагаю при этом, что эта система имеет *нормальную* форму, т. е. что в нее производные

$$\frac{\partial^{n_1}\varphi_1}{\partial x^{n_1}}, \ldots, \frac{\partial^{n_m}\varphi_m}{\partial x^{n_m}}$$

действительно входят, и что при рассмотрении этих величин как неизвестных, а остальных, входящих в нее величин как произвольно заданных, она может быть разрешена и дает только конечное число систем значений названных величин.

Первому условию, если оно не выполняется само собой, можно всегда удовлетворить линейным преобразованием независимых переменных способом, данным в предыдущем параграфе.

Наоборот, что касается второго условия, то, конечно, надо еще выяснить, может ли система уравнений ненормальной формы всегда быть приведена к нормальной форме способом, аналогичным примененному *Якоби* к системе обыкновенных дифференциальных уравнений; но здесь я этого вопроса не могу касаться.

Сделав такие предположения, я привожу теперь заданную систему уравнений к „каноническому“ виду следующим образом.

Для выражения величин

$$\frac{\partial^{n_1}\varphi_1}{\partial x^{n_1}}, \ldots, \frac{\partial^{n_m}\varphi_m}{\partial x^{n_m}}$$

через $x, x_1, \ldots, x_r, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ и входящие в заданные уравнения производные от $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ можно ввести в качестве

неизвестной величины линейную функцию от первых

$$\varphi_0 = c_1 \frac{\partial^{n_1} \varphi_1}{\partial x^{n_1}} + \cdots + c_m \frac{\partial^{n_m} \varphi_m}{\partial x^{n_m}}$$

где $c_1, \ldots, c_m$ обозначают произвольно выбранные постоянные.

Тогда получим для φ_0 алгебраическое уравнение

$$\mathfrak{G} = 0$$

где $\mathfrak{G}$ обозначает целую функцию от φ_0, коэффициенты которой являются целыми и рациональными функциями величин, принимаемых за известные.

Пусть G есть простой делитель $\mathfrak{G}$; тогда каждому значению φ_0, которое удовлетворяет уравнению

$$G = 0$$

будет соответствовать система значений неизвестных производных:

$$\frac{\partial^{n_1} \varphi_1}{\partial x^{n_1}} = \frac{G_1}{G'}, \ \ldots, \ \frac{\partial^{n_m} \varphi_m}{\partial x^{n_m}} = \frac{G_m}{G'}$$

где

$$G' = \frac{\partial G}{\partial \varphi_0}, \qquad G_\lambda = -\frac{\partial G}{\partial c_\lambda}$$

Поэтому заданные уравнения могут быть заменены известным числом систем уравнений вида

$$\begin{gathered} G(\varphi_0) = 0 \\ G' \frac{\partial^{n_1} \varphi_1}{\partial x^{n_1}} = G_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ G' \frac{\partial^{n_m} \varphi_m}{\partial x^{n_m}} = G_m \end{gathered} \tag{1}$$

где, если обозначить

$$\frac{\partial^{\alpha+\alpha_1+\cdots+\alpha_r}\varphi_\lambda}{\partial x^\alpha \partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_r^{\alpha_r}}$$

через $\varphi_{\lambda\,\alpha\alpha_1\cdots\alpha_r}$, все G будут целыми рациональными функциями от $x, x_1, \ldots, x_r$ и тех величин

$$\varphi_{\lambda\,\alpha\alpha_1\cdots\alpha_r}$$

в которых, для всякий раз рассматриваемого значения λ, имеем

$$\alpha+\alpha_1+\cdots+\alpha_r \leqq n_\lambda, \qquad \alpha < n_\lambda$$

Вопрос теперь сводится к тому, чтобы определить в самом общем виде $m+1$ функциональных элементов

$$\varphi_0(x, x_1, \ldots, x_r \mid a, a_1, \ldots, a_r)$$
$$\varphi_1(x, x_1, \ldots, x_r \mid a, a_1, \ldots, a_r)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_m(x, x_1, \ldots, x_r \mid a, a_1, \ldots, a_r)$$

таким образом, чтобы они, будучи подставлены вместо $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$, удовлетворяли уравнениям (1).

Положим, подразумевая под λ одно из чисел $0, 1, \ldots, m$,

$$\varphi_\lambda = \sum \left(b^{(\lambda)}_{\alpha\alpha_1\cdots\alpha_r} \frac{(x-a)^\alpha}{\alpha!} \frac{(x_1-a_1)^{\alpha_1}}{\alpha_1!} \cdots \frac{(x_r-a_r)^{\alpha_r}}{\alpha_r!} \right)$$
$$(\alpha=0, \ldots, \infty, \ \alpha_1=0, \ldots, \infty, \ \ldots, \ \alpha_r=0, \ldots, \infty) \qquad (2)$$

$$\varphi_\lambda = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \overset{(\alpha)}{\varphi_\lambda}(x_1, \ldots, x_r \mid a_1, \ldots, a_r)\frac{(x-a)^\alpha}{\alpha!}$$

оставляя пока постоянные $a, a_1, \ldots, a_r$ и все коэффициенты $b^{(\lambda)}_{\alpha\alpha_1\cdots\alpha_r}$ совершенно неопределенными, и разложим в ряд выражение G по степеням $x-a, x_1-a_1, \ldots, x_r-a_r$; таким образом, мы получим постоянный член этого разложения в

ряд, который можно обозначить через $\bar{G}$, если подставить в G

$$a, a_1, \ldots, a_r \quad \text{вместо} \quad x, x_1, \ldots, x_r$$
$$b^{(\lambda)}_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_r} \quad \text{вместо} \quad \varphi_{\lambda\,\alpha\alpha_1\ldots\alpha_r}$$
$$b^{(0)}_{00\ldots0} \quad \text{вместо} \quad \varphi_0$$

Тогда для удовлетворения уравнений (1) прежде всего требуется, чтобы

$$\bar{G} = 0$$

Это уравнение служит для того, чтобы выразить $b^{(0)}_{00\ldots0}$ через только что названные величины. Эти последние должны быть, следовательно, выбраны таким образом, чтобы в выражение $\bar{G}$ действительно входила подлежащая определению величина $b^{(0)}_{00\ldots0}$.

Если мы разложим затем G в ряд по степеням $x - a$, то получим коэффициент при $(x - a)^0$, который можно обозначить через

$$\overset{*}{G}\,(\overset{(0)}{\varphi_0})$$

если подставить в G

$$a \quad \text{вместо} \quad x$$

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_r}\,\varphi(x_1, \ldots, x_r | a_1, \ldots, a_r)_\lambda}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_r^{\alpha_r}} \quad \text{вместо} \quad \varphi_{\lambda\,\alpha\alpha_1\ldots\alpha_r}$$

$$\overset{(0)}{\varphi_0} \quad \text{вместо} \quad \varphi_0$$

Таким образом,

$$\overset{*}{G}(\overset{(0)}{\varphi_0})$$

является целой функцией от $\overset{(0)}{\varphi_0}$ с коэффициентами, которые суть целые функции от

$$x_1, \ldots, x_r$$

затем от

$$\overset{(0)}{\varphi_1}, \ldots, \overset{(n_1-1)}{\varphi_1}, \ldots, \overset{(0)}{\varphi_m}, \ldots, \overset{(n_m-1)}{\varphi_m}$$

и от известного числа производных этих функций. Эта функция переходит в $\overline{G}$, если положить $x_1 = a_1, \ldots, x_r = a_r$. Налагая, следовательно, на входящие в $\overline{G}$ величины $a, a_1, \ldots, a_r$, $b^{(\lambda)}_{\alpha\alpha_1, \ldots \alpha_r}$ условие, что уравнение

$$\overline{G} = 0$$

будучи разрешено относительно $b^{(0)}_{0, \ldots 0}$, имеет по крайней мере *один* конечный простой корень, и подразумевая теперь под $b^{(0)}_{0 \ldots 0}$ такой корень, будем иметь одну вполне определенную функцию

$$\overset{(0)}{\varphi_0}(x_1, \ldots, x_r \mid a_1, \ldots, a_r)$$

которая, будучи подставлена вместо $\overset{(0)}{\varphi_0}$, удовлетворит уравнению

$$\overset{*}{G}(\overset{(0)}{\varphi_0}) = 0 \qquad (3)$$

и перейдет в $b^{(0)}_{0 \ldots 0}$, если положить $x_1 = a_1, \ldots, x_r = a_r$. При этом коэффициенты только что упомянутых $n_1 + n_2 + \cdots + n_m$ функций

$$\overset{(\mu)}{\varphi_\lambda}(x_1, \ldots, x_r \mid a_1, \ldots, a_r)$$

могут быть, не считая принятого ограничения, взяты совершенно произвольно, причем само собой разумеется, однако, так, чтобы каждый из них обладал областью сходимости.

Тогда определяемая приведенным выше способом функция

$$\overset{(0)}{\varphi_0}(x_1, \ldots, x_r \mid a_1, \ldots, a_r)$$

также будет всегда иметь некоторую область сходимости.

Дифференцируя далее выражение

$$G' \frac{\partial^{n_\lambda} \varphi_\lambda}{\partial x^{n_\lambda}} - G_\lambda$$

рассматривая его как функцию от x, получим для ν-й производной от него следующую форму:

$$G' \frac{\partial^{n_\lambda+\nu} \varphi_\lambda}{\partial x^{n_\lambda+\nu}} + H_\nu^{(\lambda)}$$

где $H_\nu^{(\lambda)}$ целая функция от $x, x_1, \ldots, x_r$ и тех величин

$$\varphi_{\mu\, \alpha\alpha_1 \ldots \alpha_r}$$

в которых, при каждом рассматриваемом значении λ,

$$\alpha + \alpha_1 + \cdots + \alpha_r \leqq n_\mu + \nu, \qquad \alpha < n_\mu + \nu$$

Разложение в ряд

$$G' \frac{\partial^{n_\lambda} \varphi_\lambda}{\partial x^{n_\lambda}} - G_\lambda$$

по степеням $x - a$ имеет, следовательно, вид

$$\overset{*}{G}{}' \overset{\prime(n_\lambda+\nu)}{\varphi_\lambda} + \overset{*}{H}{}_\nu^{(\lambda)}$$

где $\overset{*}{G}{}'$, $\overset{*}{H}{}_\nu^{(\lambda)}$ получаются из G', $H_\nu^{(\lambda)}$ путем подстановки

$$x = a$$

и

$$\varphi_{\mu\, \alpha\alpha_1 \ldots \alpha_r} = \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_r} \overset{(\alpha)}{\varphi_\mu}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_r^{\alpha_r}}$$

Затем ν-я производная от выражения G по x имеет вид

$$G' \frac{\partial^\nu \varphi_0}{\partial x^\nu} + H_\nu^{(0)}$$

где $H_\nu^{(0)}$ имеет тот же вид, что и приведенные выше функции $H_\nu^{(\lambda)}$. Таким образом, если мы обозначим через

$$\overset{*}{G}{}^{(\lambda)}, \quad \overset{*}{H}{}_\nu^{(0)}$$

те выражения, в которые переходят $G^{(\lambda)}$, $H_\nu^{(0)}$ при подстановке $x = a$ и

$$\varphi_{\mu\, \alpha\, \alpha_1 \ldots \alpha_r} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_r} \overset{(\alpha)}{\varphi_\mu}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_r^{\alpha_r}}$$

то коэффициент при

$$\frac{(x-a)^\nu}{\nu!}$$

в разложении в ряд выражения G по степеням $x - a$ представится так:

$$\overset{*}{G}{}' \overset{(\nu)}{\varphi_0} + \overset{*}{H}{}_\nu^{(0)}$$

Следовательно, для того, чтобы удовлетворялись уравнения (1), должно иметь место

$$\overset{*}{G}{}' \overset{(n_\lambda+\nu)}{\varphi_\lambda} + \overset{*}{H}{}_\nu^{(\lambda)} = 0 \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, m) \tag{4}$$

Так как, в силу того, что $\overset{*}{G}{}'$ не обращается в нуль в точке $(x_1 = a_1, \ldots, x_r = a_r)$,

$$\frac{1}{\overset{*}{G}{}'}$$

может быть разложено в степенной ряд по $x_1 - a_1, \ldots, x_r - a_r$, то из уравнений (4) получим

$$\overset{(\nu+1)}{\varphi_0}, \quad \overset{(n_1+\nu)}{\varphi_1}, \ldots, \quad \overset{(n_m+\nu)}{\varphi_m}$$

в виде степенных рядов от $x_1 - a_1, \ldots, x_r - a_r$, которые будут вполне определены, если только будут вполне определены

$$\overset{(0)}{\varphi_0}$$

$$\overset{(0)}{\varphi_1}, \ldots, \overset{(n_1-1)}{\varphi_1}$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\overset{(0)}{\varphi_m}, \ldots, \overset{(n_m-1)}{\varphi_m}$$

Отсюда следует, что при выборе $a, a_1, \ldots, a_r$ и вышеприведенных функций

$$\overset{(\mu)}{\varphi_\lambda}(x_1, \ldots, x_r \mid a_1, \ldots, a_r) \qquad (\text{для } \lambda = 1, \ldots, m)$$

в соответствии с заданными условиями, а в остальном произвольно, могут быть определены, после фиксирования получающихся из уравнения

$$\bar{G} = 0$$

коэффициентов $b^{(0)}_{00\ldots0}$, сначала $\overset{(0)}{\varphi_0}$, а затем все функции

$$\overset{(n_\lambda+\nu)}{\varphi_\lambda}(x_1, \ldots, x_r \mid a_1, \ldots, a_r)$$

причем единственным способом, и именно так, чтобы

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &= \sum_{\alpha=0}^{\infty} \overset{(\alpha)}{\varphi_0}(x_1, \ldots, x_r \mid a_1, \ldots, a_r) \frac{(x-a)^\alpha}{\alpha!} \\
\varphi_1 &= \sum_{\alpha=0}^{\infty} \overset{(\alpha)}{\varphi_1}(x_1, \ldots, x_r \mid a_1, \ldots, a_r) \frac{(x-a)^\alpha}{\alpha!} \qquad (5) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_m &= \sum_{\alpha=0}^{\infty} \overset{(\alpha)}{\varphi_m}(x_1, \ldots, x_r \mid a_1, \ldots, a_r) \frac{(x-a)^\alpha}{\alpha!}
\end{aligned}$$

формально удовлетворяли уравнениям (1).

Чтобы теперь доказать, что определенные таким путем выражения $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ образуют систему функциональных элементов, которая действительно удовлетворяет уравнениям (1), надо только показать, что она сходится внутри определенной области.

Я полагаю снова

$$x = a + u, \quad x_1 = a_1 + u_1, \; \ldots, x_r = a_r + u_r$$

и понимаю теперь под $\varphi_{\lambda\,\alpha_1\ldots\alpha_r}$ степенной ряд от $u, u_1, \ldots, u_r$, в который переходит

$$\frac{\partial^{\alpha+\alpha_1+\ldots+\alpha_r}\varphi_\lambda}{\partial x^{\alpha}\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_r^{\alpha_r}}$$

при этой подстановке.

Тогда имеем

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial u} = \varphi_{\lambda\,10\ldots0} \\ &\ldots \quad \ldots \qquad\qquad (\lambda = 1, \ldots, m) \qquad\qquad (6) \\ &\frac{\partial\varphi_{\lambda,\,n_\lambda-2,\,0\ldots0}}{\partial u} = \varphi_{\lambda,\,n_\lambda-1,0\ldots0} \end{aligned}$$

$$G'\frac{\partial\varphi_{\lambda,\,n_\lambda-1,0\ldots0}}{\partial u} = G_\lambda$$

где нужно оставить, если $n_\lambda = 1$, одно только последнее уравнение.

Далее имеем

$$G'\frac{\partial\varphi_0}{\partial u} + H_1^{(0)} = 0$$

где $H_1^{(0)}$ является целой функцией от $u, u_1, \ldots, u_r$ и тех величин

$$\varphi_{\mu\,\alpha\alpha_1\ldots\alpha_r}$$

в которых для каждый раз рассматриваемого значения μ

$$\alpha + \alpha_1 + \ldots + \alpha_r \leqq n_\mu + 1, \quad \alpha \leqq n_\mu$$

Но величины

$$\frac{\partial^{n_1}\varphi_1}{\partial x^{n_1}}, \ldots, \frac{\partial^{n_m}\varphi_m}{\partial x^{n_m}}$$

и их первые производные по переменным $x_1, \ldots, x_r$ можно исключить из $H_1^{(0)}$ при помощи уравнения (4) и получить таким образом уравнение

$$(G')^k \frac{\partial \varphi_0}{\partial u} - G_0 = 0 \tag{7}$$

где k обозначает одно из чисел 0, 1, 2, 3, а G_0— выражение того же вида, что и G_λ в уравнениях (6).

Тогда для каждой функции $\varphi_{\lambda\,\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_r}$, в которой

$$\alpha + \alpha_1 + \cdots + \alpha_r < n_\lambda$$

и по крайней мере одна из величин $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, например $\alpha_\mu > 0$, имеем

$$\frac{\partial \varphi_{\lambda\,\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_\mu \ldots \alpha_r}}{\partial u} = \frac{\partial \varphi_{\lambda\,\alpha+1 \ldots \alpha_\mu \ldots \alpha_r}}{\partial u_\mu} \tag{8}$$

Наконец, имеем

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial x_1}{\partial u} = 0, \ldots, \quad \frac{\partial x_r}{\partial u} = 0 \tag{9}$$

Таким образом, для $x, x_1, \ldots, x_r$ и тех из функций

$$\varphi_{\lambda\,\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_r}$$

в которых $\alpha + \alpha_1 + \cdots + \alpha_r < n_\lambda$ (причем, однако, теперь *каждая* такая функция, если она и не должна была бы входить в уравнения (1), должна быть принята во внимание), получается система дифференциальных уравнений в частных производных вида, рассмотренного в § I, дополнении D).

Этим установлено, что они являются степенными рядами от $u, u_1, \ldots, u_r$ или $x-a, x_1-a_1, \ldots, x_r-a_r$, которые сходятся все внутри определенной области, причем в этом случае выполняются условия, которые приведены в указанном месте в пунктах a), b).

Далее, доказательство того, что для каждой удовлетворяющей уравнениям (1) системы аналитических функций может быть получена вышеописанным способом определяющая ее система функциональных элементов, проводится совершенно так же, как это было сделано в конце § II для случая, когда дано только одно дифференциальное уравнение. Особые решения уравнений (1) образуют такие системы функций $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$, которые удовлетворяют, кроме вышеуказанных уравнений, еще и уравнению $G'=0$. Но определение этих особых систем функций всегда может быть выполнено через алгебраические уравнения или при помощи системы других дифференциальных уравнений, для которых они не являются особыми решениями.

Этим полностью решается та задача, которую я себе поставила [6]. Но я замечу еще следующее. И трансцендентные дифференциальные уравнения в частных производных могут быть во многих случаях приведены к системе уравнений (1) таким образом, что

$$G, G_1, \ldots, G_m$$

будут не рациональными, но представимыми в форме всюду сходящихся степенных рядов целыми функциями от

$$x, x_1, \ldots, x_r \text{ и величин } \varphi_{\lambda\, \alpha\alpha_1\ldots\alpha_r}$$

В этом случае полученные выше результаты полностью сохраняют свою силу, что непосредственно очевидно из способа их получения.

Берлин, июль 1874.



О ПРИВЕДЕНИИ НЕКОТОРОГО КЛАССА АБЕЛЕВЫХ ИНТЕГРАЛОВ ТРЕТЬЕГО РАНГА К ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ИНТЕГРАЛАМ *

ВВЕДЕНИЕ

Абель [1] в своем „*Очерке по теории эллиптических функций*" (Полное собрание сочинений: *Précis des fonctions elliptiques,* Oeuvres complètes, t. I, p. 350) доказал нижеследующую теорему:

„Если вообще интеграл вида

$$\int (y_1 dx_1 + \cdots + y_\mu\, dx_\mu)$$

где $y_1, \ldots, y_\mu$ означают *алгебраические* функции $x_1, \ldots, x_\mu$, связанные между собой некоторым числом алгебраических уравнений, выражается через алгебраические, логарифмические и эллиптические функции, то всегда возможно приведение такого рода:

$$\int (y_1\, dx_1 + \cdots + y_\mu\, dx_\mu) = r + A_1 \log \rho^{(1)} + \cdots + A_k \log \rho^{(k)} + \\ + \alpha_1 \int \frac{F_1(s_1)\, ds_1}{\Delta_1(s_1)} + \cdots + \alpha_n \int \frac{F_n(s_n)\, ds_n}{\Delta_n(s_n)}$$

* Это сочинение было представлено летом 1874 г. философскому факультету Геттингенского университета. Здесь оно появляется в совершенно неизмененном виде.

4*

где $A_1, \ldots, A_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ обозначают постоянные; $F_\nu(s_\nu)$ — рациональная функция от s_ν; $\Delta_\nu(s_\nu)$ — квадратный корень из целой функции третьей или четвертой степени от s_ν; $r, \rho^{(1)}, \ldots, \rho^{(k)}, s_1, \ldots, s_n, \Delta_1(s_1), \ldots, \Delta_n(s_n)$ составлены *рационально* из $x_1, \ldots, x_\mu, y_1, \ldots, y_\mu$."

В качестве следствия из этой теоремы мой уважаемый учитель, господин Вейерштрасс, сообщил мне следующее предложение:

„Если y алгебраическая функция от x и если среди интегралов

$$\int F(x, y)\, dx$$

где $F(x, y)$ обозначает произвольную рациональную функцию x и y, имеются такие, которые приводятся к эллиптическим, *то это приведение также всегда возможно для интеграла первого рода* (2).

Потому что, если s_μ, $\Delta_\mu(s_\mu)$ выражаются рационально через x и y, то интеграл

$$\int \frac{ds_\mu}{\Delta_\mu(s_\mu)}$$

переходит в

$$\int H(x, y)\, dx$$

где $H(x, y)$ означает рациональную функцию от x, y, и так как

$$\int \frac{ds_\mu}{\Delta_\mu(s_\mu)}$$

есть интеграл первого рода, то преобразованный интеграл

$$\int H(x, y)\, dx$$

должен быть таким же".

Этим самым исследование о приведении абелева интеграла высшего ранга к эллиптическим интегралам приводится в основном к ответу на следующий вопрос:

„Пусть между двумя переменными x, y существует алгебраическое уравнение ρ-го ранга *, так что, если y рассматривается как функция x, между интегралами

$$\int F(x, y)\,dx$$

имеется ρ линейно независимых $(u_1, u_2, \ldots, u_\rho)$, через которые каждый интеграл первого рода u выражается в форме (3)

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_\rho u_\rho$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_\rho$ обозначают постоянные; спрашивается, каким особым свойством должно обладать уравнение между x и y, т. е. какие должны выполняться соотношения между его коэффициентами, если возможно определить величины c так, чтобы u превращалось в эллиптический интеграл

$$\int \frac{ds}{\Delta(s)}$$

и притом так, чтобы s и $\Delta(s)$ выражались рационально через переменные x, y."

Прежде всего господин Вейерштрасс представил искомое соотношение в *трансцендентной форме* следующим образом.

Как известно, интегралы $u_1, u_2, \ldots, u_\rho$ можно выбрать так, что они будут иметь 2ρ систем основных периодов (5) вида

$$\begin{array}{cccccccccc} 1, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & \tau_{11}, & \tau_{12}, & \ldots, & \tau_{1\rho} \\ 0, & 1, & 0, & \ldots, & 0, & \tau_{21}, & \tau_{22}, & \ldots, & \tau_{2\rho} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & 1, & \tau_{\rho 1}, & \tau_{\rho 2}, & \ldots, & \tau_{\rho\rho} \end{array}$$

где для $\tau_{\alpha\beta}$ имеет место соотношение

$$\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}$$

---

* Число ρ есть то самое (4), которое Риман обозначает через p.

Тогда интеграл u имеет следующие 2ρ основных периода:

$$c_1,\ c_2, \ldots, c_\rho, \quad \sum_{\alpha=1}^{\rho} c_\alpha \tau_{\alpha,1}, \quad \sum_{\alpha=1}^{\rho} c_\alpha \tau_{\alpha,2}, \quad \ldots, \quad \sum_{\alpha=1}^{\rho} c_\alpha \tau_{\alpha,\rho}$$

Тогда каждому из них соответствует, если u преобразуется указанным образом в эллиптический интеграл, период последнего, так что имеем

$$c_1 = 2n_1\omega + 2n_1'\omega', \quad c_2 = 2n_2\omega + 2n_2'\omega', \ldots, \quad c_\rho = 2n_\rho\omega + 2n_\rho'\omega'$$

$$c_1\tau_{11} + c_2\tau_{21} + \cdots + c_\rho\tau_{\rho 1} = -2(m_1\omega + m_1'\omega')$$
$$c_1\tau_{12} + c_2\tau_{22} + \cdots + c_\rho\tau_{\rho 2} = -2(m_2\omega + m_2'\omega')$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$c_1\tau_{1\rho} + c_2\tau_{2\rho} + \cdots + c_\rho\tau_{\rho\rho} = -2(m_\rho\omega + m_\rho'\omega')$$

где n, n', m, m' обозначают целые (положительные или отрицательные) числа, а $(2\omega, 2\omega')$ есть основная пара периодов эллиптического интеграла. Если подставить в ρ последних уравнений $c_1, \ldots, c_\rho$ из ρ первых, то получится

$$0 = (m_1 + n_1\tau_{11} + n_2\tau_{21} + \cdots + n_\rho\tau_{\rho 1})\,\omega + (m_1' + n_1'\tau_{11} + n_2'\tau_{21} + \cdots + n_\rho'\tau_{\rho 1})\,\omega'$$

$$0 = (m_2 + n_1\tau_{12} + n_2\tau_{22} + \cdots + n_\rho\tau_{\rho 2})\,\omega + (m_2' + n_1'\tau_{12} + n_2'\tau_{22} + \cdots + n_\rho'\tau_{\rho 2})\,\omega'$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0 = (m_\rho + n_1\tau_{1\rho} + n_2\tau_{2\rho} + \cdots + n_\rho\tau_{\rho\rho})\,\omega + (m_\rho' + n_1'\tau_{1\rho} + n_2'\tau_{2\rho} + \cdots + n_\rho'\tau_{\rho\rho})\,\omega'$$

откуда между величинами $\tau_{\alpha\beta}$ получаются $(\rho - 1)$ соотношений

$$\frac{m_1 + n_1\tau_{11} + n_2\tau_{21} + \cdots + n_\rho\tau_{\rho 1}}{m_1' + n_1'\tau_{11} + n_2'\tau_{21} + \cdots + n_\rho'\tau_{\rho 1}} = \frac{m_2 + n_1\tau_{12} + n_2\tau_{22} + \cdots + n_\rho\tau_{\rho 2}}{m_2' + n_1'\tau_{12} + n_2'\tau_{22} + \cdots + n_\rho'\tau_{\rho 2}} = \cdots = \frac{m_\rho + n_1\tau_{1\rho} + n_2\tau_{2\rho} + \cdots + n_\rho\tau_{\rho\rho}}{m_\rho' + n_1'\tau_{1\rho} + n_2'\tau_{2\rho} + \cdots + n_\rho'\tau_{\rho\rho}} \quad (1)$$

Тогда нужно, как мне также показал господин Вейерштрасс, предположить относительно чисел m, n, m', n', что

$$m_1 n_1' + m_2 n_2' + \cdots + m_\rho n_\rho' - m_1' n_1 - m_2' n_2 - \cdots - m_\rho' n_\rho$$

есть *целое* и *положительное* число (6), которое мы обозначим через k, и тогда можно определить систему $4\rho(\rho-1)$ целых чисел:

$$\begin{array}{l}
m_{12},\ m_{22},\ \ldots,\ m_{\rho 2},\ n_{12},\ n_{22},\ \ldots,\ n_{\rho 2}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
m_{1\rho},\ m_{2\rho},\ \ldots,\ m_{\rho\rho},\ n_{1\rho},\ n_{2\rho},\ \ldots,\ n_{\rho\rho}\\
m_{12}',\ m_{22}',\ \ldots,\ m_{\rho 2}',\ n_{12}',\ n_{22}',\ \ldots,\ n_{\rho 2}'\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
m_{1\rho}',\ m_{2\rho}',\ \ldots,\ m_{\rho\rho}',\ n_{1\rho}',\ n_{2\rho}',\ \ldots,\ n_{\rho\rho}'
\end{array}$$

так, чтобы они удовлетворяли соотношениям

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha=1}^{\rho} (m_\alpha m_{\beta\alpha}' - m_\alpha' m_{\beta\alpha}) = 0\\
&\sum_{\alpha=1}^{\rho} (n_\alpha n_{\beta\alpha}' - n_\alpha' n_{\beta\alpha}) = 0\\
&\sum_{\alpha=1}^{\rho} (m_\alpha n_{\beta\alpha}' - n_\alpha m_{\beta\alpha}') = 0 \qquad \begin{pmatrix}\beta = 1, \ldots, \rho\\ \gamma = 1, \ldots, \rho\end{pmatrix}\\
&\sum_{\alpha=1}^{\rho} (m_{\alpha\beta} n_{\alpha\gamma} - m_{\alpha\gamma} n_{\alpha\beta}) = 0 \qquad (2)\\
&\sum_{\alpha=1}^{\rho} (m_{\alpha\beta}' n_{\alpha\gamma}' - m_{\alpha\gamma}' n_{\alpha\beta}') = 0\\
&\sum_{\alpha=1}^{\rho} (m_{\alpha\beta}' n_{\alpha\gamma} - m_{\alpha\gamma}' n_{\alpha\beta}) = \begin{cases} 0 & (\beta \gtrless \gamma)\\ k & (\beta = \gamma)\end{cases}
\end{aligned}$$

Тогда, если положим

$$\omega_{11} = m_1 + n_1\tau_{11} + \cdots + n_\rho\tau_{1\rho}, \quad \ldots$$
$$\ldots, \omega_{\rho 1} = m_\rho + n_1\tau_{\rho 1} + \cdots + n_\rho\tau_{\rho\rho}$$
$$\omega_{12} = m_{12} + n_{12}\tau_{11} + \cdots + n_{\rho 2}\tau_{1\rho}, \quad \ldots\ldots$$
$$\ldots, \omega_{\rho 2} = m_{\rho 2} + n_{12}\tau_{\rho 1} + \cdots + n_{\rho 2}\tau_{\rho\rho}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\omega_{1\rho} = m_{1\rho} + n_{1\rho}\tau_{11} + \cdots + n_{\rho\rho}\tau_{1\rho}, \quad \ldots\ldots$$
$$\ldots, \omega_{\rho\rho} = m_{\rho\rho} + n_{1\rho}\tau_{\rho 1} + \cdots + n_{\rho\rho}\tau_{\rho\rho}$$
$$\omega_{11}' = m_1' + n_1'\tau_{11} + \cdots + n_\rho'\tau_{1\rho}, \quad \ldots\ldots$$
$$\ldots, \omega_{\rho 1}' = m_\rho' + n_1'\tau_{\rho 1} + \cdots + n_\rho'\tau_{\rho\rho}$$
$$\omega_{12}' = m_{12}' + n_{12}'\tau_{11} + \cdots + n_{\rho 2}'\tau_{1\rho}, \quad \ldots\ldots$$
$$\ldots, \omega_{\rho 2}' = m_{\rho 2}' + n_{12}'\tau_{\rho 1} + \cdots + n_{\rho 2}'\tau_{\rho\rho}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\omega'_{1\rho} = m_{1\rho}' + n_{1\rho}'\tau_{11} + \cdots + n_{\rho\rho}'\tau_{1\rho}, \quad \ldots\ldots$$
$$\ldots, \omega_{\rho\rho}' = m_{\rho\rho}' + n_{1\rho}'\tau_{\rho 1} + \cdots + n_{\rho\rho}'\tau_{\rho\rho}$$

то между величинами $\omega_{\alpha\beta}$, $\omega_{\alpha\beta}'$ существуют соотношения

$$\sum_{\gamma=1}^{\rho} (\omega_{\alpha\gamma}\omega_{\beta\gamma}' - \omega_{\beta\gamma}\omega_{\alpha\gamma}') = 0 \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1, \ldots, \rho \\ \beta = 1, \ldots, \rho \end{pmatrix} \tag{3}$$

Поэтому, если, понимая под $v_1, \ldots, v_\rho$ независимые переменные, положим [7]

$$v_\alpha' = \frac{(\omega)_{1\alpha} v_1 + \ldots + (\omega)_{\rho\alpha} v_\rho}{(\omega)} \qquad (\alpha = 1, \ldots, \rho)$$

то можно образовать функцию

$$\vartheta(v_1', \ldots, v_\rho' \mid \tau_{11}', \ldots, \tau_{\rho\rho}')$$

которая будет преобразованием функции [8]

$$\vartheta(v_1, \ldots, v_\rho \mid \tau_{11}, \ldots, \tau_{\rho\rho})$$

(Для полного доказательства нужно показать, что величины $\tau_{\alpha\beta}'$ также удовлетворяют тем условиям, которые требуются для сходимости ряда, с помощью которого представляется

$$\vartheta(v_1', \ldots, v_\rho' \mid \tau_{11}', \ldots, \tau'_{\rho\rho}) \,)$$

Соотношения

$$\frac{\omega_{11}'}{\omega_{11}} = \frac{\omega_{21}'}{\omega_{21}} = \ldots = \frac{\omega_{\rho 1}'}{\omega_{\rho 1}}$$

показывают теперь, что

$$\tau_{12} = \tau_{13} = \ldots = \tau_{1\rho} = 0$$

и, следовательно, можно выразить

$$\vartheta(v_1', \ldots, v_\rho' \mid \tau_{11}', \ldots, \tau'_{\rho\rho})$$

в виде произведения ϑ-функции $(\rho-1)$ переменной и эллиптической функции ϑ

$$\vartheta(v_1' \mid \tau_{11}')$$

а если это имеет место, то интеграл

$$\sum_{\alpha=1}^{\rho} \frac{1}{(\omega)} (\omega)_{1\alpha} u_\alpha$$

можно также всегда превратить требуемым образом в эллиптический.

Об этом предложении (для случая $\rho=2$) упоминает господин Кенигсбергер в сочинении *„О преобразовании второй степени для абелевых функций первого порядка“* (Königsberger, Über die Transformation des zweiten Grades für die Abel'sche Functionen der ersten Ordnung. Borchardt's Journal, Bd 67, S. 71), как о сообщенном ему письменно господином Вейерштрассом.

Тем самым задача, о которой идет речь, приведена в связь с теорией преобразований ϑ-функций. Именно, если функция

$$\vartheta(v_1', \ldots, v_\rho' \mid \tau_{11}', \ldots, \tau_{\rho\rho}')$$

представляется как произведение ϑ-функции (ρ—1) переменных и эллиптической, то это же имеет место для остальных функций (9)

$$\vartheta(v_1', \ldots, v_\rho' \mid \tau_{11}', \ldots, \tau_{\rho\rho}')_\lambda$$

которые происходят от нее *.

Отсюда следует, что между величинами

$$\vartheta(0, \ldots, 0 \mid \tau_{11}', \ldots, \tau_{\rho\rho}')_\lambda$$

должны существовать соотношения, выражающие условия возможности указанного разложения функции. Именно, оказывается, что между *четными* функциями

$$\vartheta(v_1', \ldots, v_\rho' \mid \tau_{11}', \ldots, \tau_{\rho\rho}')\lambda$$

есть некоторое число таких, которые будут исчезать при $v_1' = v_2' = \ldots = v'_\rho = 0$. Но величины $\vartheta(0, \ldots, 0 \mid \tau_{11}', \ldots \tau_{\rho\rho}')$ связаны с $\vartheta(0, \ldots, 0 \mid \tau_{11}, \ldots, \tau_{\rho\rho})$ алгебраически; при этом отношения последних выражаются алгебраически через коэффициенты уравнения, связывающего x и y. Поэтому указанные трансцендентные уравнения можно заменить алгебраическими.

Господин Кенигсбергер в указанном сочинении проделал это для случая ($\rho = 2$, $k = 2$) и показал, что рассмотренные

---

* Относительно употребляемых обозначений я отсылаю к сочинению Кенигсбергера „О преобразовании абелевых функций первого порядка" (Königsberger. Über die Transformation der Abel'schen Functionen erster Ordnung. Borchardt's Journal, Bd. 64, S. 17), а также к диссертации Хеноха „О периодах абелевых функций" (Henoch. De Abelianarum functionum periodis. Berlin, 1867).

уже Якоби (Crelle's Journal, Bd 8) и приведенные к эллиптическим интегралы (10)

$$\int \frac{(1+\sqrt{k\lambda}\,x)\,dx}{\sqrt{x(1-x)(1+kx)(1+\lambda x)(1-k\lambda x)}}$$

$$\int \frac{(1-\sqrt{k\lambda}\,x)\,dx}{\sqrt{x(1-x)(1+kx)(1+\lambda x)(1-k\lambda x)}}$$

и получаемые из них линейным преобразованием суть *единственные* абелевы интегралы первого порядка и первого рода, которые заданным образом приводятся к эллиптическим.

В предлагаемой работе я попыталась также для случая, когда между x, y имеет место уравнение *третьего* ранга, получить алгебраические соотношения, которые должны иметь место между коэффициентами этого уравнения, когда среди интегралов $\int F(x,y)\,dx$ должны находиться такие, которые с помощью преобразования второй степени (т. е. для которых $k=2$) приводятся к эллиптическим.

Я, однако, при этом пошла по другому пути, нежели только что указанный.

Господин Вейерштрасс позже нашел существенное добавление к приведенной теореме:

„Если из функции $\vartheta(v_1, \ldots, v_\rho \mid \tau_{11}, \ldots, \tau_{\rho\rho})$ с помощью некоторого преобразования k-й степени получается другая, которая представляет произведение ϑ-функции $(\rho-1)$ переменных и эллиптической функции, то первоначальная функция всегда может быть *линейным* преобразованием (при котором $k=1$) переведена в другую $\vartheta(v_1', \ldots, v_\rho' \mid \bar{\tau}_{11}, \ldots, \bar{\tau}_{\rho\rho})$, в которой

$$\bar{\tau}_{12} = \frac{\mu}{k}, \quad \bar{\tau}_{13} = 0, \ \ldots, \ \bar{\tau}_{1\rho} = 0$$

где μ обозначает одно из чисел $1, 2, \ldots, k-1$“.

Тогда можно только что рассмотренные интегралы $u_1, \ldots, u_\rho$ заменить другими, для которых вместо величин $\tau_{\alpha\beta}$ входят $\overline{\tau}_{\alpha\beta}$; таким образом, получается предложение:

„Если среди интегралов, зависящих от данной алгебраической функции ρ-го ранга, есть такой, который может быть приведен к эллиптическому, то для этого необходимо и достаточно, чтобы среди функций

$$\vartheta(v_1, \ldots, v_\rho \mid \tau_{11}, \ldots, \tau_{\rho\rho})$$

получающихся из этой функции, существовала такая, для которой

$$\tau_{12} = \frac{\mu}{k}, \quad \tau_{13} = 0, \ldots, \tau_{1\rho} = 0$$

(k—целое положительное число и $\mu = 1, 2, \ldots, k-1$)“.

Тогда я заметила, что, положив в основание это предложение, можно получить искомые соотношения также без теории преобразований, если привлечь на помощь еще следующую теорему, выведенную в лекциях господина Вейерштрасса об абелевых функциях.

Пусть $x, y, u_1, \ldots, u_\rho, \tau_{11}, \ldots, \tau_{\rho\rho}$ имеют те же значения, что и раньше, а $u_1', \ldots, u_\rho'$ суть значения $u_1, \ldots, u_\rho$ в другой точке. Среди ϑ-функций модулей $\tau_{\alpha\beta}$ выберем какие-нибудь две *нечетные*

$$\vartheta(v_1, \ldots, v_\rho)_\lambda, \quad \vartheta(v_1, \ldots, v_\rho)_\mu$$

по произволу, тогда будем иметь, если положим

$$\frac{du_\alpha}{dx} = \overline{H}(x, y)_\alpha, \qquad \frac{du_\alpha'}{dx'} = \overline{H}(x', y')_\alpha \tag{4}$$

что

$$\left\{\frac{\vartheta(u_1 - u_1', \ldots, u_\rho - u_\rho')_\lambda}{\vartheta(u_1 - u_1', \ldots, u_\rho - u_\rho')_\mu}\right\}^2 = \sum_\alpha \frac{\vartheta_\lambda'^{(\alpha)}\,\overline{H}(x', y')_\alpha}{\vartheta_\mu^{(\alpha)}\,\overline{H}(x', y')_\alpha} \sum_\alpha \frac{\vartheta_\lambda^{(\alpha)}\,\overline{H}(x, y)_\alpha}{\vartheta_\mu^{(\alpha)}\,\overline{H}(x, y)_\alpha} \tag{5}$$

где $\vartheta_\lambda^{(\alpha)}$, $\vartheta_\mu^{(\alpha)}$ обозначают значения, которые принимают

$$\frac{\partial\vartheta(v_1,\ldots,v_\rho)_\lambda}{\partial v_\alpha}, \qquad \frac{\partial\vartheta(v_1,\ldots,v_\rho)_\mu}{\partial v_\alpha}$$

при $v_1 = 0, \ldots, v_\rho = 0$.

Предпослав это, я принимаю теперь, что y есть алгебраическая функция третьего ранга от x, выбранная так, что в одной из происходящих от нее ϑ-функций будет

$$\tau_{12} = \frac{1}{2}, \qquad \tau_{13} = 0$$

В этом случае имеем

$$\vartheta(v_1, v_2, v_3) =$$

$$= \sum e^{\pi i\left\{n_1(2v_1+n_1\tau_{11}+{}^1/_2\, n_2)+n_2(2v_2+{}^1/_2\, n_1+n_2\tau_{22}+n_3\tau_{23})+n_3(2v_3+n_2\tau_{23}+n_3\tau_{33})\right\}}$$

Если в этих суммах отделить те члены, в которых n_1 четное, от тех, в которых оно нечетное, то получим

$$\begin{aligned}
\vartheta(v \mid \tau) &= \sum e^{n(2v+n\tau)\pi i} \\
\vartheta(v \mid \tau)_0 &= \sum e^{n[2(v-{}^1/_2)+n\tau]\pi i} \\
\vartheta(v \mid \tau)_2 &= \sum e^{(n+{}^1/_2)[2v+(n+{}^1/_2)\tau]\pi i} \\
\vartheta(v \mid \tau)_1 &= \sum e^{(n+{}^1/_2)[2(v-{}^1/_2)+(n+{}^1/_2)\tau]\pi i}
\end{aligned} \tag{6}$$

и

$$\vartheta(v, w \mid \tau_{22}, \tau_{23}, \tau_{33}) = \sum e^{\{n_1(2v+n_1\tau_{22}+n_2\tau_{23})+n_2(2w+n_1\tau_{23}+n_2\tau_{33})\}\pi i}$$

полагая

$$\begin{aligned}
\vartheta(v_1, v_2, v_3) &= \vartheta(2v_1 \mid 4\tau_{11})\,\vartheta(v_2, v_3 \mid \tau_{22}, \tau_{23}, \tau_{33}) + \\
&+ \vartheta(2v_1 \mid 4\tau_{11})_2\,\vartheta(v_2 - {}^1/_2, v_3 \mid \tau_{22}, \tau_{23}, \tau_{33})
\end{aligned} \tag{7}$$

Если увеличить переменные v_1, v_2, v_3 на половины периодов и воспользоваться предыдущими обозначениями, то получим из этого уравнения следующие уравнения:

(8)

$$\vartheta(v_1, v_2, v_3)_5 = \vartheta(2v_1 \mid 4\tau_{11})\,\vartheta(v_2, v_3)_3 + \vartheta(2v_1 \mid 4\tau_{11})_2\,\vartheta(v_2, v_3)_{04}$$
$$\vartheta(v_1, v_2, v_3)_{125} = \vartheta(2v_1 \mid 4\tau_{11})\,\vartheta(v_2, v_3)_3 - \vartheta(2v_1 \mid 4\tau_{11})_2\,\vartheta(v_2, v_3)_{04}$$
$$\vartheta(v_1, v_2, v_3)_{345} = \vartheta(2v_1 \mid 4\tau_{11})\,\vartheta(v_2, v_3)_{04} + \vartheta(2v_1 \mid 4\tau_{11})_2\,\vartheta(v_2, v_3)_3$$
$$\vartheta(v_1, v_2, v_3)_{06} = \vartheta(2v_1 \mid 4\tau_{11})\,\vartheta(v_2, v_3)_{04} - \vartheta(2v_1 \mid 4\tau_{11})_2\,\vartheta(v_2, v_3)_3$$
$$\vartheta(v_1, v_2, v_3)_{46} = \vartheta(2v_1 \mid 4\tau_{11})_0\,\vartheta(v_2, v_3)_{24} + \vartheta(2v_1 \mid 4\tau_{11})_1\,\vartheta(v_2, v_3)_{14}$$
$$\vartheta(v_1, v_2, v_3)_{035} = \vartheta(2v_1 \mid 4\tau_{11})_0\,\vartheta(v_2, v_3)_{24} - \vartheta(2v_1 \mid 4\tau_{11})_1\,\vartheta(v_2, v_3)_{14}$$

Среди многих уравнений, имеющих место между $\vartheta(v_1, v_2, v_3)_\lambda$, имеется также следующее: (9)

$$g_1\vartheta(v_1, v_2, v_3)_5\,\vartheta(v_1, v_2, v_3)_{125} + g_2\vartheta(v_1, v_2, v_3)_{345}\,\vartheta(v_1, v_2, v_3)_{06} +$$
$$+ g_3\vartheta(v_1, v_2, v_3)_{46}\,\vartheta(v_1, v_2, v_3)_{035} + g_4\vartheta(v_1, v_2, v_3)_3\,\vartheta(v_1, v_2, v_3)_{123} = 0$$

Если положить в этом уравнении

$$v_\alpha = u_\alpha - u_\alpha'$$

и выбрать, что всегда возможно, пару (x', y') так, чтобы

$$\vartheta(u_1 - u_1', u_2 - u_2', u_3 - u_3')_3$$

была тождественно равна нулю, и положить

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \vartheta_5^{(1)}\overline{H}(x, y)_1 + \vartheta_5^{(2)}\overline{H}(x, y)_2 + \vartheta_5^{(3)}\overline{H}(x, y)_3 \\
\xi_2 &= \vartheta_{345}^{(1)}\overline{H}(x, y)_1 + \vartheta_{345}^{(2)}\overline{H}(x, y)_2 + \vartheta_{345}^{(3)}\overline{H}(x, y)_3 \\
\xi_3 &= \vartheta_{46}^{(1)}\overline{H}(x, y)_1 + \vartheta_{46}^{(2)}\overline{H}(x, y)_2 + \vartheta_{46}^{(3)}\overline{H}(x, y)_3 \\
\xi_1' &= \vartheta_{125}^{(1)}\overline{H}(x, y)_1 + \vartheta_{125}^{(2)}\overline{H}(x, y)_2 + \vartheta_{125}^{(3)}\overline{H}(x, y)_3 \\
\xi_2' &= \vartheta_{06}^{(1)}\overline{H}(x, y)_1 + \vartheta_{06}^{(2)}\overline{H}(x, y)_2 + \vartheta_{06}^{(3)}\overline{H}(x, y)_3 \\
\xi_3' &= \vartheta_{035}^{(1)}\overline{H}(x, y)_1 + \vartheta_{035}^{(2)}\overline{H}(x, y)_2 + \vartheta_{035}^{(3)}\overline{H}(x, y)_3
\end{aligned} \qquad (10)$$

то из вышеуказанного уравнения (9) получается

$$h_1\sqrt{\xi_1\xi_1'}+h_2\sqrt{\xi_2\xi_2'}+h_3\sqrt{\xi_3\xi_3'}=0 \qquad (11)$$

где h_1, h_2, h_3 обозначают постоянные. В то же время ξ_1', ξ_2', ξ_3' суть однородные линейные функции ξ_1, ξ_2, ξ_3. Если рассматривать при этом ξ_1, ξ_2, ξ_3 как (однородные) координаты точки, то это уравнение представляет кривую. Прямые, представляемые уравнениями

$$\xi_1=0,\quad \xi_1'=0,\quad \xi_2=0,\quad \xi_2'=0,\quad \xi_3=0,\quad \xi_3'=0$$

для которых, ради краткости, буквы $\xi_1, \xi'_1, \ldots$ можно принять за обозначения, будут тогда *двойными касательными* этой кривой и три пары

$$(\xi_1,\ \xi_1'),\quad (\xi_2,\ \xi_2'),\quad (\xi_3,\ \xi_3')$$

принадлежат известным 63 группам, на которые разделяются пары, образованные 28-ю двойными касательными кривой 4-й степени*.

Теперь продифференцируем уравнения (8) по v_1, v_2, v_3 и положим затем $v_1=v_2=v_3=0$, тогда получим

$$\vartheta_5^{(1)}=\vartheta_{125}^{(1)}=\vartheta_{06}^{(1)}=\vartheta_{345}^{(1)}=0 \qquad (12)$$

Отсюда следует, что четыре прямые

$$\xi_1,\quad \xi_1',\quad \xi_2,\quad \xi_2'$$

пересекаются в *одной* точке.

* Если взять такую пару произвольно и провести через четыре ее точки соприкосновения какое-нибудь коническое сечение, то оно пересечет кривую 4-й степени еще в четырех точках, в которых она имеет касание с другим коническим сечением. Тогда имеется (кроме системы указанных двух двойных касательных) *пять* таких конических сечений, для которых каждое второе распадается на систему двух прямых. Получающиеся таким образом пять пар прямых будут тогда парами двойных касательных и образуют с первоначальными одну из упомянутых 63 групп.

Теперь уравнение кривой, о которой идет речь, можно представить так, чтобы его коэффициенты выражались *рационально* через постоянные уравнения, имеющего место между x и y. Потому что всегда можно (бесчисленным множеством способов) образовать три выражения, составленные рационально из x, y и постоянных названных уравнений

$$H(x, y)_1, \quad H(x, y)_2, \quad H(x, y)_3$$

из которых получаются интегралы первого рода. Тогда, если положить

$$H(x, y)_\alpha = X_\alpha$$

то $\overline{H}(x, y)_1, \overline{H}(x, y)_2, \overline{H}(x, y)_3$, а вместе с тем также ξ_1, ξ_1', ξ_2, ξ_2', ξ_3, ξ_3' будут однородными линейными функциями X_1, X_2, X_3; при этом между этими величинами должно существовать уравнение

$$F(X_1, X_2, X_3) = 0$$

в котором выражение в левой части есть однородная целая функция 4-й степени от X_1, X_2, X_3.

Это уравнение может быть образовано из заданного уравнения между x и y и принятых двух

$$X_1 H(x, y)_2 - X_2 H(x, y)_1 = 0$$

$$X_2 H(x, y)_3 - X_3 H(x, y)_2 = 0$$

исключением величин x, y, и, следовательно, его коэффициенты имеют указанное свойство.

Если рассматривать величины X_1, X_2, X_3 как (однородные) координаты точки (на плоскости), то уравнение

$$F = 0$$

представляет ту же кривую 4-й степени, что и вышеуказанное уравнение (11).

При этом, однако, надо заметить следующее. Положим

$$\xi = \frac{H(x, y)_1}{H(x, y)_3}, \qquad \eta = \frac{H(x, y)_2}{H(x, y)_3}$$

Тогда, если уравнение

$$F(\xi, \eta, 1) = 0$$

должно быть эквивалентно уравнению между x, y, то с привлечением последнего x, y должны выражаться рационально через ξ, η. Это не будет иметь места только тогда, когда для *каждого* значения ξ имеются только *два* различных значения η.

Если мы исключим этот случай, который должен рассматриваться особо, то тогда доказано следующее.

„Если y есть алгебраическая функция третьего ранга от x, то уравнение, имеющее место между x и y, может быть преобразовано бесчисленным множеством способов в однородное уравнение четвертой степени $F = 0$ между тремя величинами X_1, X_2, X_3, которые являются рациональными функциями от x, y, причем это всегда можно сделать так, чтобы коэффициенты этого уравнения, а также выражений X составлялись рационально из постоянных данного уравнения. Тогда уравнение $F = 0$, вообще говоря, — т. е. всегда, когда не имеет места упомянутый случай, — неприводимо и представляет кривую четвертого порядка без двойных точек.

При этом среди двойных касательных этого уравнения должно быть четыре совпадающих, т. е. таких, у которых восемь точек касания лежат на одном коническом сечении; они пересекаются в *одной* точке, если среди абелевых интегралов, зависящих от y, должен найтись один, который с помощью преобразования рассмотренного здесь рода $(k = 2)$ может быть преобразован в эллиптический".

Это предложение может также быть обращено.

А именно, пусть $\xi_1, \xi_1', \xi_2, \xi_2'$ суть однородные линейные функции от X_1, X_2, X_3, которые, будучи приравнены нулю, дают уравнения каких-нибудь четырех соответствующих двойных касательных кривой $F = 0$, и из группы двойных касательных, определяемой парой (ξ_1, ξ_1'), выбрана еще неко-

торая третья (ξ_3, ξ_3'), тогда, как известно, можно $F(X_1, X_2, X_3)$ привести к виду

$$g_1^2(\xi_1\xi_1')^2 + g_2^2(\xi_2\xi_2')^2 + g_3^2(\xi_3\xi_3')^2 - 2g_2g_3(\xi_2\xi_3\xi_2'\xi_3') -$$
$$- 2g_3g_1(\xi_3\xi_1\xi_3'\xi_1') - 2g_1g_2(\xi_1\xi_2\xi_1'\xi_2')$$

где g_1, g_2, g_3 обозначают постоянные, из которых ни одна не равна нулю. Имеем, следовательно,

$$F(X_1, X_2, X_3) = (g_3\xi_3\xi_3' - g_2\xi_2\xi_2' - g_1\xi_1\xi_1')^2 - 4g_1g_2\xi_1\xi_2\xi_1'\xi_2'$$

Пусть теперь четыре прямые $(\xi_1, \xi_2, \xi_1', \xi_2')$ пересекаются в одной точке и пусть будут p, q какие-нибудь две однородные линейные функции от X_1, X_2, X_3, которые пересекаются в той же самой точке; тогда ξ_1, ξ_2, ξ_1', ξ_2' будут все однозначными линейными функциями p, q, и если, кроме того, выразить ξ_3' через ξ_1, ξ_2, ξ_3, то будем иметь

$$g_3\xi_3\xi_3' - g_1\xi_1\xi_1' - g_2\xi_2\xi_2' = l\xi_3^2 + (p, q)_1\xi_3 + (p, q)_2$$

где l — постоянная, а $(p, q)_1$, $(p, q)_2$ суть целые однородные функции p, q соответственно 1-й и 2-й степени.

Поэтому, если положим

$$r = h\left(\xi_3 + \frac{1}{2}\frac{(p, q)_1}{l}\right)$$

понимая под h произвольную постоянную, то получаем

$$F(X_1, X_2, X_3) = R_0r^4 + 2R_2(p, q)r^2 + R_4(p, q)$$

где R_0 — постоянная, отличная от нуля *, а R_2, R_4 — целые однородные функции p, q соответственно 2-й и 4-й степени.

Если выберем h так, чтобы детерминант p, q, r был равен 1, и обозначим выражение, стоящее в правой части предыдущего уравнения, через $G(p, q, r)$, то, предполагая,

* Если бы R_0 было равно нулю, то точка пересечения двойных касательных лежала бы на кривой, что для кривой 4-й степени без двойных точек (а только для такой $\rho = 3$) не может иметь места.

что вместо X_1, X_2, X_3 подставлены их выражения через x, y так, что $F=0$, будем, как известно, иметь

$$\frac{X_2\,dX_3-X_3\,dX_2}{\frac{\partial F}{\partial X_1}}=\frac{X_3\,dX_1-X_1\,dX_3}{\frac{\partial F}{\partial X_2}}=\frac{X_1\,dX_2-X_2\,dX_1}{\frac{\partial F}{\partial X_3}}=$$

$$=\frac{qdr-rdq}{\frac{\partial G}{\partial p}}=\frac{rdp-pdr}{\frac{\partial G}{\partial q}}=\frac{pdq-qdp}{\frac{\partial G}{\partial r}}$$

Но

$$\frac{\partial G}{\partial r}=4r\left[R_0r^2+R_2(p,\,q)\right]$$

$$\left[R_0r^2+R_2(p,\,q)\right]^2=R_2^2(p,\,q)-R_4(p,\,q)$$

Имеем также

$$\frac{pdq-qdp}{4\left[R_0r^2+R_2(p,\,q)\right]}=r\,\frac{X_1\,dX_2-X_2\,dX_1}{\frac{\partial F}{\partial X_3}}=\ldots$$

или, если положим

$$\xi=\frac{q}{r},\qquad R(\xi)=R_2^2(1,\xi)-R_4(1,\xi)$$

$$r=c_1X_1+c_2X_2+c_3X_3$$

то

$$\int\frac{c_1X_1+c_2X_2+c_3X_3}{\partial F\,/\,\partial X_3}(X_1\,dX_2-X_2\,dX_1)=\int\frac{d\xi}{\sqrt{R(\xi)}}$$

При этом следует заметить, что

$$\sqrt{R(\xi)}=R_0\frac{r^2}{p^2}+\frac{R_2(p,\,q)}{p^2}$$

так что, согласно отмеченному во введении, величины

$$\xi\ \text{и}\ \sqrt{R(\xi)}$$

обе выражаются рационально через x, y.

Если еще заметить, что когда $G(p, q, r)$ имеет заданную форму, в точке ($p=0$, $q=0$) также всегда пересекаются четыре соответствующие двойные касательные кривой, представляемой уравнением $F=0$, то можно сказать:

„Чтобы уравнение между x и y имело свойство, о котором идет речь, *необходимо* и *достаточно*, чтобы происходящее из него уравнение четвертой степени

$$F(X_1, X_2, X_3)=0$$

могло быть преобразовано линейным преобразованием в другое:

$$G(p, q, r)=0$$

в которое входят только *четные* степени переменного r, что равносильно тому, что четыре соответствующие двойные касательные кривой четвертой степени, представляемой уравнением $F=0$, пересекаются в *одной* точке. Однако, чтобы последнее имело место, между коэффициентами F должны существовать два определенных алгебраических соотношения, которые тогда также преобразуются в алгебраические соотношения между постоянными уравнения в x и y. Если произведено преобразование F в G, то вместе с тем определится тот интеграл первого рода, зависящий от y, который должен быть преобразован в эллиптический, и это преобразование само собой выполняется“.

Теперь спрашивается, имеются ли еще другие интегралы первого рода, зависящие от y, которые тоже могут быть приведены к эллиптическим подстановкой второй степени ($k=2$). Чтобы решить это, нужно, согласно предыдущему, исследовать, может ли функция $G(p, q, r)$ быть преобразована с помощью линейного преобразования в другую функцию того же вида $G_1(p_1, q_1, r_1)$ так, чтобы r и r_1 были различными (причем $\frac{r_1}{r}$ также непостоянно).

При этом мы опять будем рассматривать X_1, X_2, X_3 как координаты, так что $p_1 = 0$, $q_1 = 0$, $r_1 = 0$, так же как $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$, суть уравнения некоторых прямых линий.

А теперь имеем уравнение

$$G(p, q, r) = G_1(p_1, q_1, r_1)$$

для любых значений X_1, X_2, X_3, причем в G входят только четные степени r, в G_1 только четные степени r_1. Точку пересечения прямых (p, q) обозначим через a, прямых (p_1, q_1) через b и (r, r_1) через c.

Функция G не изменяет своей формы, если вместо p, q выбрать две другие линейные функции от X_1, X_2, X_3, которые выбираются так, чтобы соответствующие им прямые линии пересекались как раз в a. Точно так же G_1 не изменит своей формы, если вместо p_1, q_1 выбрать две другие функции, соответствующие линии которых проходят через b.

Прежде всего я принимаю, что точка a не лежит на линии r_1, и выбираю функции p, q, p_1, q_1 так, что линия q совпадает с линией q_1 и проходит через точки (a, b), p проходит через точки (a, c) и p_1 через точки (b, c); поэтому, понимая под α, β, γ, δ, ε постоянные, можно положить

$$\begin{aligned} p &= \alpha r_1 + \beta p_1 \\ q &= \gamma q_1 \\ r &= \delta r_1 + \varepsilon p_1 \end{aligned}$$

или, что то же,

$$\begin{aligned} p &= r_1 + \beta p_1 \\ r &= r_1 + p_1 \\ q &= q_1 \end{aligned}$$

так как заданными определениями устанавливаются только отношения коэффициентов функций p, q, p_1, q_1.

Теперь, пусть

$$G(p, q, r) = r^4 + (L_1 p^2 + L_2 pq + L_3 q^2) r^2 + M_1 p^4 + \\ + M_2 p^3 q + M_3 p^2 q^2 + M_4 pq^3 + M_5 q^4$$

тогда, чтобы с помощью данной подстановки G перешла в функцию, в которую входят только четные степени r_1, должны иметь место следующие уравнения:

$$4+2L_1(\beta+1)+4M_1\beta=0$$

$$L_2+M_2=0$$

$$4+2L_1\beta(\beta+1)+4M_1\beta^3=0$$

$$L_2(2\beta+1)+3M_2\beta^2=0$$

$$2L_3+2M_3\beta=0$$

$$M_4=0$$

Этим уравнениям можно удовлетворить двояким образом:

A) Если L_2, M_2, M_4 не все три равны нулю одновременно, то должно быть

$$\beta=-\frac{1}{3},\ L_1=6,\ M_1=9,\ M_2=-L_2,\ M_3=L_3,\ M_4=0$$

так что G должно иметь вид

$$r^4+(6p^2+L_2pq+L_3q^2)r^2+9p^4-L_2p^3q+L_3p^2q^2+M_5q^4=0$$

Тогда

$$G_1=16\left\{r_1^4+r_1^2\left[6\left(\frac{p_1}{3}\right)^2+L_2\left(\frac{p_1}{3}\frac{q_1}{2}\right)+L_3\left(\frac{q_1}{2}\right)^2\right]+9\left(\frac{p_1}{3}\right)^4-\right.$$
$$\left.-L_2\left(\frac{p_1}{3}\right)^3\left(\frac{q_1}{2}\right)+L_3\left(\frac{p_1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2+M_5\left(\frac{q_1}{2}\right)^4\right\}$$

Отсюда видно, что в этом случае оба интеграла

$$\int\frac{r(X_1dX_2-X_2dX_1)}{\partial F/\partial X_3},\qquad\int\frac{r_1(X_1dX_2-X_2dX_1)}{\partial F/\partial X_3}$$

могут быть преобразованы в эллиптические, в которых функция $R(\xi)$ одна и та же.

Далее получается, что то же имеет место для интеграла

$$\int \frac{(r - r_1)(X_1\, dX_2 - X_2\, dX_1)}{\partial F / \partial X_3}$$

но что, кроме этих трех, нет никакого другого интеграла первого рода, который рассмотренным здесь образом мог бы быть преобразован в эллиптический.

B) Если L_2 и вместе с тем $M_2 = 0$, то отсюда

$$L_1 = -\frac{2}{\beta}, \quad M_1 = \frac{1}{\beta^2}$$
$$L_2 = 0, \qquad M_2 = 0$$
$$L_3 = -\beta M_3, \quad M_4 = 0$$

и, следовательно, β, M_3, M_5 могут быть выбраны произвольно.

Также имеем

$$G = \frac{1}{\beta^2}\, p^4 + M_5\, q^4 + r^4 - \beta M_3\, q^2\, r^2 - \frac{2}{\beta}\, r^2\, p^2 + M_3\, p^2\, q^2$$

В этом случае имеются, таким образом, три линейно независимых интеграла первого рода, которые могут быть приведены к эллиптическим.

При этом здесь молчаливо принимается, что точки a, b, c не лежат на прямой линии (следовательно, также a, b не совпадают). Это, однако, может быть обосновано. Прежде всего ясно, что ни 0 и a, ни c и b не могут совпадать, так как иначе p, q, r в первом и p_1, q_1, r_1 во втором не были бы независимыми друг от друга. Если бы a, b, c лежали на одной прямой, то прямые q, q_1 могли бы быть совмещены с ними и функции r_1, q_1, p_1, p, q так определены, что мы имели бы

$$q = q_1 = r - r_1 = p - p_1$$

т. е.

$$r = r_1 + q_1$$
$$q = q_1$$
$$p = p_1 + q_1$$

Но тогда в G коэффициенты при r_1^3 не исчезали бы.

Из уравнений

$$r = r_1 + p_1, \quad p = r_1 + \beta p_1, \quad q = q_1$$

или

$$p_1 = \frac{r-p}{1-\beta}, \quad q_1 = q, \quad r_1 = \frac{p-\beta r}{1-\beta}$$

следует, что в точке b, где $p_1 = 0$, $q_1 = 0$, не может также быть $r = 0$, так как иначе в этой точке также было бы $p = 0$, $q = 0$, следовательно, b и c должны были бы совпадать. Отсюда, если переставить r, r_1 друг с другом, тотчас следует, что также точка a никогда не может быть точкой линии r_1, если b не лежит на линии r.

После этого остается только рассмотреть случай, когда a лежит на r_1 и одновременно b на r.

Здесь можно заставить пройти

линии q, q_1 через a, b
" p " a, c
" p_1 " b, c

и принять

$$p = r_1, \quad q = q_1, \quad r = p_1$$

При этом G переходит в

$$p_1^4 + (L_1 r_1^2 + L_2 r_1 q_1 + L_3 q_1^2)\, p_1^2 + M_1 r_1^4 + M_2 r_1^3 q_1 + \\ + M_3 r_1^2 q_1^2 + M_4 r_1 q_1^3 + M_5 q_1^4$$

Тогда должны быть

$$L_2 = 0, \quad M_2 = 0, \quad M_4 = 0$$

т. е. *$G(p, q, r)$ должна быть целой однородной функцией 2-й степени от p^2, q^2, r^2.*

В этом случае имеются, следовательно, *три* не зависящих один от другого интеграла первого рода, которые могут быть преобразованы в эллиптические интегралы.

Рассмотренный выше случай (B) содержится в этом; он отличается, однако, тем, что когда он имеет место, то, кроме интегралов

$$\int p \frac{X_1 dX_2 - X_2 dX_1}{\partial F / \partial X_3}, \qquad \int q \frac{X_1 dX_2 - X_2 dX_1}{\partial F / \partial X_3}$$

$$\int r \frac{X_1 dX_2 - X_2 dX_1}{\partial F / \partial X_3}$$

еще четвертый может быть преобразован к эллиптическому.

Это будет тогда, когда $F(X_1, X_2, X_3)$ линейным преобразованием указанного вида может быть приведена к форме

$$r^4 + (L_1 p^2 + L_3 q^2) r^2 + M_1 p^4 + M_3 p^2 q^2 + M_5 q^4$$

так, чтобы между коэффициентами имели место соотношения

$$L_1^2 = 4M_1, \qquad L_1 L_3 = 2M_3$$

тогда четвертый интеграл будет тот, в котором вместо r входит

$$\frac{r - \beta p}{1 - \beta} \left(\beta = -\frac{2}{L_1}\right)$$

Я исследовала также исключенный выше случай. Если он имеет место, то каждый интеграл первого рода прежде всего преобразуется в *гиперэллиптический*

$$\int \frac{c_0 + c_1 \xi + c_2 \xi^2}{\sqrt{R(\xi)}} d\xi$$

где $R(\xi)$ обозначает целую функцию восьмой степени от ξ.

Я ограничиваюсь здесь приведением результатов.

1. Если обозначить через $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ восемь значений ξ, для которых $R(\xi)$ исчезает, то в случае. когда один из предыдущих интегралов приводится к эллиптическому, они могут быть расположены так, чтобы между ними имели место два уравнения:

$$1 = \frac{(a_0 - a_1)(a_2 - a_7)(a_3 - a_4)(a_5 - a_6)}{(a_0 - a_7)(a_1 - a_2)(a_3 - a_6)(a_4 - a_5)}$$

$$1 = \frac{(a_0 - a_5)(a_1 - a_6)(a_2 - a_3)(a_4 - a_7)}{(a_0 - a_3)(a_1 - a_4)(a_2 - a_5)(a_6 - a_7)}$$

2. Если же, кроме этих уравнений, выполняется еще следующее:

$$1 = \frac{(a_0 - a_4)(a_1 - a_3)(a_2 - a_6)(a_5 - a_7)}{(a_0 - a_6)(a_1 - a_5)(a_2 - a_4)(a_3 - a_7)}$$

то указанным образом могут быть преобразованы к эллиптическим еще три не зависящих один от другого интеграла первого рода.

В заключение замечу, что целью моей работы меньше был вывод полученных результатов, так как их, если только они найдены, можно изложить гораздо короче чисто алгебраически; в основном нужно было дать пример применения теорий моего уважаемого учителя, изложенных во введении, что он сам побудил меня осуществить, и *полностью* исследовать случай, когда $\rho = 3$, $k = 2$.



О ПРЕЛОМЛЕНИИ СВЕТА В КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ СРЕДАХ

В своих „Лекциях по упругости“ (Leçons sur l'élasticité) Ламе применил теорию упругости к объяснению двойного преломления света в трехосных кристаллах. Я здесь вкратце воспроизведу главный результат его исследований.

Исходя из дифференциальных уравнений в частных производных, которым удовлетворяют все возможные колебания в упругой однородной * среде, он вначале устанавливает условия, при которых вообще возможно двойное преломление света. Предполагая колебания отдельных частиц поперечными, т. е. происходящими без изменения плотности колеблющейся среды, можно дифференциальные уравнения в частных производных, которые определяют эти колебания, представить в виде

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)}{\partial y} - b^2 \frac{\partial\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z}\right)}{\partial z} \\
\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)}{\partial z} - c^2 \frac{\partial\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)}{\partial x} \qquad (1) \\
\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= b^2 \frac{\partial\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z}\right)}{\partial x} - a^2 \frac{\partial\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)}{\partial y}
\end{aligned}
$$

---

* Т. е. в такой, в которой упругие свойства в окрестности каждой точки одни и те же.

где x, y, z — прямоугольные координаты точки колеблющейся среды, ξ, η, ζ — компоненты перемещения этой точки из ее положения равновесия, t — время и a, b, c — три положительные постоянные — главные оси упругости рассматриваемого тела.

Гипотеза о том, что колебания происходят без изменения плотности колеблющейся среды, требует, чтобы величина

$$\theta = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

тождественно равнялась нулю. Но тогда из уравнений (1) следует

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0$$

Поставленной гипотезе можно будет, следовательно, удовлетворить, когда начальные значения ξ, η, ζ и их производные по t при $t = 0$ выбраны так, что

$$(\theta)_{t=0} = 0, \qquad \left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$$

В основе всей теории Френеля лежит гипотеза, что каждая частица поверхности преломляющей среды, которую встречает световой луч, становится центром системы плоских волн и притом так, что по каждому направлению распространяются две волны с различной скоростью.

Нужно было, следовательно, сначала исследовать, можно ли проинтегрировать уравнения (1) в соответствии с этой гипотезой.

Ламе сделал предположение, что центр колебаний совершает ряд колебаний, так что компоненты его перемещений можно представить формулами

$$\xi_0 = X_0 \cos 2\pi \frac{t}{\tau}, \qquad \eta_0 = Y_0 \cos 2\pi \frac{t}{\tau}, \qquad \zeta_0 = Z_0 \cos 2\pi \frac{t}{\tau}$$

где τ — продолжительность полного колебания.

Любая точка колеблющейся среды колеблется с двумя различными фазами λ_1 и λ_2, и закон ее перемещения может быть, следовательно, представлен компонентами перемещения

$$\xi = X_1 \cos 2\pi \frac{t - \lambda_1}{\tau} + X_2 \cos 2\pi \frac{t - \lambda_2}{\tau}$$

$$\eta = Y_1 \cos 2\pi \frac{t - \lambda_1}{\tau} + Y_2 \cos 2\pi \frac{t - \lambda_2}{\tau}$$

$$\zeta = Z_1 \cos 2\pi \frac{t - \lambda_1}{\tau} + Z_2 \cos 2\pi \frac{t - \lambda_2}{\tau}$$

Величины $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2$ суть функции x, y, z, которые должны быть определены так, чтобы соответствующие значения ξ, η, ζ, подставленные в уравнения (1), удовлетворяли им и чтобы для $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

$$X_1 + X_2 = X_0, \quad Y_1 + Y_2 = Y_0, \quad Z_1 + Z_2 = Z_0$$

По теории Френеля геометрическое место всех тех точек, которые в единицу времени встречает выходящая из центра волна, есть двухполостная поверхность, известная в геометрии под названием поверхности волны.

Полагаем вместе с Ламе

$$R = x^2 + y^2 + z^2$$

$$Q = a^2(b^2 + c^2)x^2 + b^2(c^2 + a^2)y^2 + c^2(a^2 + b^2)z^2$$

$$P = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2$$

$$q = a^2b^2c^2$$

тогда уравнение этой поверхности будет

$$q - Q + RP = 0 \tag{2}$$

Чтобы установить положение световой волны в зависимости от времени λ, нужно только в это уравнение вместо x, y, z подставить $\frac{x}{\lambda}$, $\frac{y}{\lambda}$, $\frac{z}{\lambda}$. Тогда получим уравнение

$$q\lambda^4 - Q\lambda^2 + RP = 0 \tag{2a}$$

Варьируя в этом уравнении λ, получим все последовательные положения распространяющейся волны.

Это уравнение, решенное относительно λ^2, имеет два корня

$$\lambda^2 = \frac{Q \pm \sqrt{Q^2 - 4qRP}}{2q}$$

Два положительных значения λ представляют два различных промежутка времени λ_1 и λ_2, по истечении которых распространяющаяся волна встречает точку. Так как дифференциальные уравнения в частных производных (1) линейны, то достаточно определить функции X, Y, Z, предполагая λ одним из корней вышеупомянутого уравнения. Весьма трудным, но очень элегантным способом Ламе удается в действительности определить функции X, Y, Z требуемым образом.

Положим

$$\omega = \frac{\lambda}{\sqrt{(a^2\lambda^2 - R)(b^2\lambda^2 - R)(c^2\lambda^2 - R)}}$$

$$X = \omega\left(y\frac{\partial\lambda}{\partial z} - z\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)$$

$$Y = \omega\left(z\frac{\partial\lambda}{\partial x} - x\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)$$

$$Z = \omega\left(x\frac{\partial\lambda}{\partial y} - y\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)$$

Тогда величины

$$\xi = X\cos 2\pi\frac{t-\lambda}{\tau}$$

$$\eta = Y\cos 2\pi\frac{t-\lambda}{\tau}$$

$$\zeta = Z\cos 2\pi\frac{t-\lambda}{\tau}$$

будут интегралами дифференциальных уравнений (1), удовлетворяющими одновременно соотношению

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z} = 0$$

Очевидно, в этом случае мы имеем только одну систему частных интегралов дифференциальных уравнений в частных производных (1). Кроме того, при ближайшем исследовании видно, что эта система частных интегралов представляет движение, физически невозможное, так как в каждой точке оптической оси каждая из величин X, Y, Z представляется в форме $0:0$ и становится неопределенной.

Ламе пытается объяснить этот результат следующим образом. Все молекулы, принадлежащие одной и той же волновой поверхности, колеблются одновременно. Их перемещения происходят в соответствующей касательной плоскости к поверхности волны перпендикулярно к направлению луча. Геометрическим путем сейчас же найдем, что эти перемещения совпадают с направлением соответствующей сферической кривой на поверхности волны. Через каждую обыкновенную точку поверхности волны проходит только одна сферическая кривая; но конечная точка оптической оси отличается тем свойством, что она одновременно лежит на двух сферических кривых. Ее движение вследствие этого отличается от движения каждой другой точки. Обе кривые охватывают ее, следовательно, определенным образом, по выражению Ламе, двумя противоположными дугами, двумя полуокружностями или полуэллипсами, кривизна которых очень велика. Отсюда возникает для рассматриваемой точки сложное круговое или эллиптическое движение. Таким способом Ламе думает объяснить и устранить полученную из формул неопределенность. Против этого можно, однако, возразить, что это объяснение должно было бы быть получено непосредственно из формул, т. е. что комбинируя выражения X_1 и X_2, Y_1 и Y_2, Z_1 и Z_2, можно устранить неопределенность и выяснить действительную траекторию рассматриваемой точки. Однако не в этом дело.

Кроме того, существует еще одна точка в пространстве, в которой формулы Ламе не в состоянии описать явления. В точке начала координат, т. е. в самом центре колебания, каждая из величин X, Y, Z становится бесконечно большой. Здесь

все колебания должны быть бесконечно большими и притом по всем направлениям (впрочем, это результат, к которому необходимо придем, если исходить из гипотезы единственного центра колебания).

Ламе пытается объяснить противоречие между его теорией и действительностью, делая предположение, что каждая материальная частица рассматриваемой среды окружена атмосферой эфира, которая приводится в колебание проникающим лучом. Колебания эти затем переносятся на материальную частицу.

Я здесь не буду более детально входить в обсуждение этой гипотезы. Ламе сам только высказал ее, не пытаясь математически ее обосновать. Прежде чем обсуждать возможность колебаний в кристаллической среде по теории Френеля, необходимо, во всяком случае, построить общее решение дифференциальных уравнений в частных производных (1), так как только тогда мы будем знать все возможные движения. Это исследование и является предметом моей работы.

Мой глубокоуважаемый учитель Вейерштрасс посоветовал мне заняться этим вопросом, ожидая, что метод, найденный им много лет назад и примененный к интегрированию некоторых более простых линейных дифференциальных уравнений в частных производных, и в этом случае оправдает себя.

Я здесь сообщу содержание еще неопубликованной статьи, которая была предоставлена мне Вейерштрассом в 1881 г., но составлена им гораздо раньше.

„Пусть будут u, v, w действительные переменные величины, которые мы рассматриваем как координаты некоторой точки в пространстве относительно трех осей, пересекающихся в точке O под прямыми углами. Далее, пусть будет S некоторая замкнутая поверхность, обладающая тем свойством, что она пересекает любую прямую, выходящую из O, только в *одной* точке. Тогда каждой точке P пространства соответствует определенная точка P_1 поверхности, именно точка пересечения этой поверхности отрезком OP или его продолжением;

обозначим отношение OP к OP_1 через t, тогда t будет существенно положительной непрерывной функцией координат u, v, w точки P, обладающей тем свойством, что она переходит в kt при умножении u, v, w одновременно на одно и то же положительное число k. Далее, геометрическое место всех точек, для которых t имеет одно и то же значение, есть поверхность σ_t, подобная S и вся охватываемая ею при $t < 1$ и, наоборот, охватывающая S при $t > 1$.

Положим

$$u' = \frac{\partial t}{\partial u}, \qquad v' = \frac{\partial t}{\partial v}, \qquad w' = \frac{\partial t}{\partial w}$$

тогда u', v', w' будут функции u, v, w, не изменяющиеся при умножении u, v, w одновременно на k и имеющие следующее геометрическое значение. Мысленно проведем в точке u, v, w касательную плоскость к поверхности σ_t, проходящей через эту точку, тогда ее уравнение будет

$$u'U + v'V + w'W = t$$

где U, V, W текущие координаты какой-нибудь ее точки.

Опуская далее из точки O на эту плоскость перпендикуляр, получим его длину

$$\frac{t}{\sqrt{u'u' + v'v' + w'w'}}$$

и координаты его основания

$$\frac{u't}{u'u' + v'v' + w'w'}, \qquad \frac{v't}{u'u' + v'v' + w'w'}, \qquad \frac{w't}{u'u' + v'v' + w'w'}$$

При этом предположении пусть $F(u, v, w)$ будет функция u, v, w, изменяющаяся повсюду непрерывно, за исключением, быть может, окрестности точки O, и пусть обозначено через

$$\pm \int\limits_{(t_0 \ldots t)} F(u, v, w)\, d\omega$$

значение, которое получит интеграл

$$\iiint F(u, v, w)\, du\, dv\, dw$$

когда интегрирование распространяется на все точки пространства, лежащие между двумя поверхностями σ_t и σ_{t_0}, где мы сейчас рассматриваем t как неограниченно изменяющуюся положительную величину и t_0 как особое (фиксированное) значение t, причем в этой формуле $d\omega$ есть элемент объема $du\,dv\,dw$ и нужно брать верхний или нижний знак, смотря по тому

$$t > t_0 \quad \text{или} \quad t < t_0$$

Тогда получим простым геометрическим рассмотрением два уравнения

$$D_t \int\limits_{(t_0 \dots t)} F(u, v, w)\, d\omega = \int \frac{F(u, v, w)\, d\sigma_t}{\sqrt{u'u' + v'v' + w'w'}} \qquad \text{(A)*}$$

$$D_t \int\limits_{(t_0 \dots t)} D_u F(u, v, w)\, d\omega = D_t \int \frac{u' F(u, v, w)\, d\sigma_t}{\sqrt{u'u' + v'v' + w'w'}} \qquad \text{(B)}$$

в которых $d\sigma_t$ обозначает элемент поверхности σ_t.

---

* Уравнение (A) получается следующим образом. Приращение

$$\int\limits_{(t_0 \dots t)} F(u, v, w)\, d\omega$$

когда t изменяется на dt, равно

$$\int\limits_{(t \dots t+dt)} F(u, v, w)\, d\omega$$

Так как расстояние между касательными плоскостями в соответствующих точках обеих поверхностей t и $t+dt$, как указано выше, равно

$$\frac{dt}{\sqrt{u'u' + v'v' + w'w'}}\,,$$

то элемент объема может также быть представлен в виде

Отсюда, если в первой формуле заменить F через $u'F$, следует

$$D_t \int\limits_{(t_0 \dots t)} D_u F(u, v, w)\, d\omega = D_t^2 \int\limits_{(t_0 \dots t)} u'F(u, v, w)\, d\omega \qquad \text{(C)}$$

Пусть $\varphi(u, v, w)$ есть функция, имеющая то же свойство, что и принятое для F, $f(u, v, w)$ — другая функция, изменяющаяся непрерывно повсюду (также и в окрестности точки O), и

$$F(x, y, z, t) = D_t \int\limits_{(t_0 \dots t)} \varphi(u, v, w)\, f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega$$

где x, y, z — координаты некоторой точки.

Тогда имеем

$$\begin{aligned} D_x F &= D_t \int \varphi D_x f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega = \\ &= D_t \int \varphi D_u f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega = \\ &= D_t \int D_u [\varphi f(x+u, y+v, z+w)]\, d\omega - \\ &- D_t \int \frac{\partial\varphi}{\partial u} f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega \end{aligned}$$

$$\frac{d\sigma_t\, dt}{\sqrt{u'u' + v'v' + w'w'}}$$

Следовательно

$$\int\limits_{(t \dots t+dt)} F(u, v, w)\, d\omega = \int \frac{F(u, v, w)\, d\sigma_t\, dt}{\sqrt{u'u' + v'v' + w'w'}}$$

или, деля на dt:

$$D_t \int\limits_{(t_0 \dots t)} F(u, v, w)\, d\omega = \int \frac{F(u, v, w)\, d\sigma_t}{\sqrt{u'u' + v'v' + w'w'}}$$

Уравнение (B) получится помимо дифференцирования по t обеих частей известным преобразованием объемного интеграла в поверхностный: см., например, Риман (Riemann, Schwere, Electricität und Magnetismus, § 19).

Следовательно, по (C)

$$D_x F = D_t^2 \int\limits_{(t_0 \ldots t)} u' \varphi f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega -$$

$$- D_t \int\limits_{(t_0 \ldots t)} \frac{\partial \varphi}{\partial u} f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega \qquad \text{(D)}$$

Аналогично находим

$$D_y F = D_t^2 \int\limits_{(t_0 \ldots t)} v' \varphi f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega -$$

$$- D_t \int\limits_{(t_0, t)} \frac{\partial \varphi}{\partial v} f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega$$

$$D_z F = D_t^2 \int\limits_{(t_0 \ldots t)} w' \varphi f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega -$$

$$- D_t \int\limits_{(t_0 \ldots t)} \frac{\partial \varphi}{\partial w} f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega$$

Отсюда получается далее

(E)

$$D_x^2 F = D_t^3 \int u' u' \varphi f(x+u, \ldots)\, d\omega -$$

$$- D_t^2 \int \left(\frac{\partial u'}{\partial u} \varphi + 2u' \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) f(x+u, \ldots)\, d\omega + D_t \int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} f(x+u, \ldots)\, d\omega$$

$$D_y^2 F = D_t^3 \int v' v' \varphi f(x+u, \ldots)\, d\omega -$$

$$- D_t^2 \int \left(\frac{\partial v'}{\partial v} \varphi + 2 v' \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) f(x+u, \ldots)\, d\omega + D_t \int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} f(x+u, \ldots)\, d\omega$$

$$D_z^2 F = D_t^3 \int w' w' \varphi f(x+u, \ldots)\, d\omega -$$

$$- D_t^2 \int \left(\frac{\partial w'}{\partial x} \varphi + 2w' \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right) f(x+u, \ldots)\, d\omega + D_t \int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial w^2} f(x+u, \ldots)\, d\omega$$

$$D_{yz}^2 F = D_t^3 \int v' w' \varphi f(x+u, \ldots) d\omega -$$

$$-D_t^2 \int \left(\varphi \frac{\partial v'}{\partial w} + v' \frac{\partial \varphi}{\partial w} + w' \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) f(x+u, \ldots) d\omega + D_t \int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v\, \partial w} f(x+u, \ldots) d\omega$$

$$D_{zx}^2 F = D_t^3 \int w' u' \varphi f(x+u, \ldots) d\omega -$$

$$-D_t^2 \int \left(\varphi \frac{\partial w'}{\partial u} + w' \frac{\partial \varphi}{\partial u} + u' \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right) f(x+u, \ldots) d\omega + D_t \int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial w\, \partial u} f(x+u, \ldots) d\omega$$

$$D_{xy}^2 F = D_t^3 \int u' v' \varphi f(x+u, \ldots) d\omega -$$

$$-D_t^2 \int \left(\varphi \frac{\partial u'}{\partial v} + u' \frac{\partial \varphi}{\partial v} + v' \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) f(x+u, \ldots) d\omega + D_t \int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v} f(x+u, \ldots) d\omega$$

Обозначая через $\vartheta(u, v, w)$ функцию u, v, w, дающую то значение t, которое соответствует неизвестной точке (u, v, w), имеем

$$u' = \frac{\partial \vartheta}{\partial u}, \quad v' = \frac{\partial \vartheta}{\partial v}, \quad w' = \frac{\partial \vartheta}{\partial w}$$

Таким образом,

$$\frac{\partial v'}{\partial w} = \frac{\partial w'}{\partial v} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v\, \partial w}, \qquad \frac{\partial w'}{\partial u} = \frac{\partial u'}{\partial w} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u\, \partial w}, \qquad \frac{\partial u'}{\partial v} = \frac{\partial v'}{\partial u} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u\, \partial v}.$$

Из формул (E), которые могут быть любым образом продолжены, следует

$$A \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + C \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + 2A' \frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial z} + 2B' \frac{\partial^2 F}{\partial z\, \partial x} + 2C' \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} =$$

$$= D_t^3 \int\limits_{(t_0 \ldots t)} P f(x+u, y+v, z+w) d\omega -$$

$$- D_t^2 \int\limits_{(t_0 \ldots t)} Q f(x+u, y+v, z+w) d\omega +$$

$$+ D_t \int\limits_{(t_0 \ldots t)} R f(x+u, y+v, z+w) d\omega$$

где $A, B, C, \ldots$ — постоянные.

При выводе этих формул, кроме принятых ограничений, сделанных относительно функций f, φ, еще предполагается непрерывность на поверхности σ функций u', v', w' и их производных до порядка, встречающегося в этих формулах. Однако эти формулы можно применять и во многих случаях, где сделанные предположения относительно функций φ, u', v', w' в отдельных точках не выполняются.

А именно, образуем для различных φ, обозначенных через φ_1, $\varphi_2, \ldots$, и одной и той же функции f выражения

$$F_1 = D_t \int\limits_{(t_0\ t)} \varphi_1(u, v, w) f(x+u, y+v, z+w) d\omega$$

$$F_2 = D_t \int\limits_{(t_0\ t)} \varphi_2(u, v, w) f(x+u, y+v, z+w) d\omega$$

и если T есть выражение, составленное из частных производных от F_1, F_2 и т. д. по x, y, z, линейное и с постоянными коэффициентами, то с помощью установленных формул T представимо в виде

$$T = D_t \int\limits_{(t_0 .. t)} \Phi_1(u, v, w) f(x+u, y+v, z+w) d\omega +$$
$$+ D_t^2 \int\limits_{(t_0\ t)} \Phi_2(u, v, w) f(x+u, y+v, z+w) d\omega + \ldots$$

где Φ_1, $\Phi_2, \ldots$ — выражения, составленные из функций u', v', w', φ_1, $\varphi_2, \ldots$ и их производных так, чтобы и в случае, когда последние в отдельных точках не непрерывны, все же Φ_1, $\Phi_2, \ldots$ как функции u, v, w удовлетворяли сделанным ранее предположениям относительно функции φ. Если это имеет место, то заданное представление для T допустимо*.

* Я пользуюсь этим случаем, чтобы заметить, что этим летом, когда моя работа была уже готова, я узнала из дружеского личного сообщения проф. Кронекера, что он в своих исследованиях о потен-

Применим эти формулы к интегрированию дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = A \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + C \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \\ + 2A' \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \, \partial z} + 2B' \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \, \partial x} + 2C' \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \, \partial y}$$

для случая, когда действительные коэффициенты $A, B, \ldots$ принимают такие значения, что функция

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2A' yz + 2B' zx + 2C' xy$$

при действительных значениях x, y, z остается всегда положительной и равна нулю только тогда, когда все эти величины одновременно равны нулю.

Результат, преобразованный в двойные интегралы, совпадает с результатом Коши (Cauchy, Journal de l'Ecole polytechnique, cah. 20, p. 297—309) и в частном случае, когда

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \varphi$$

с результатом Пуассона, приведенным им в статье, опубликованной в Mémoires de l'Académie des Sciences.

Пусть в этом случае поверхность σ — эллипсоид, уравнение которого

$$au^2 + bv^2 + cw^2 + 2a' vw + 2b' wu + 2c' uv = 1$$

Тогда

$$\vartheta^2 = au^2 + bv^2 + cw^2 + 2a' vw + 2b' wu + 2c' uv$$

циале применил подобные формулы преобразования для трехкратных интегралов, основанные на дифференцировании по параметру, от которого зависит область интегрирования.

Отсюда

$$\vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial u} = au + c'v + b'w, \qquad \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial v} = c'u + bv + a'w,$$

$$\vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial w} = b'u + a'v + cw$$

Эти три линейные функции можно обозначить через U, V, W. Кроме того

$$u \frac{\partial \vartheta}{\partial u} + v \frac{\partial \vartheta}{\partial v} + w \frac{\partial \vartheta}{\partial w} = \vartheta$$

Отсюда следует, так как

$$P = \Big[(AU + C'V + B'W) \frac{\partial \vartheta}{\partial u} +$$

$$+ (C'U + BV + A'W) \frac{\partial \vartheta}{\partial v} + (B'U + A'V + CW) \frac{\partial \vartheta}{\partial w}\Big] \frac{\varphi}{\vartheta}$$

что $P = \varphi$, если выбрать $a, b, \ldots,$ так, чтобы удовлетворить уравнениям

$$\begin{aligned} AU + C'V + B'W &= u \\ C'U + BV + A'W &= v \\ B'U + A'V + CW &= w \end{aligned}$$

Но из этих уравнений следует, если положить

$$G = ABC - AA'A' - BB'B' - CC'C' + 2A'B'C'$$

что

$$a = \frac{BC - A'A'}{G}, \qquad b = \frac{CA - B'B'}{G}, \qquad c = \frac{AB - C'C'}{G}$$

$$a' = \frac{B'C' - AA'}{G}, \qquad b' = \frac{C'A' - BB'}{G}, \qquad c' = \frac{A'B' - CC'}{G}$$

Принимая далее

$$\varphi = \frac{1}{\vartheta}$$

имеем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = -\vartheta^{-2}\frac{\partial\vartheta}{\partial u} = -\vartheta^{-3}U$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v} = -\vartheta^{-2}\frac{\partial\vartheta}{\partial v} = -\vartheta^{-3}V$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial w} = -\vartheta^{-2}\frac{\partial\vartheta}{\partial w} = -\vartheta^{-3}W$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} = -a\vartheta^{-3} + 3\vartheta^{-3}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial u}\right)^2$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} = -b\vartheta^{-3} + 3\vartheta^{-3}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial v}\right)^2$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial w^2} = -c\vartheta^{-3} + 3\vartheta^{-3}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial w}\right)^3$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\partial w} = -a'\vartheta^{-3} + 3\vartheta^{-3}\frac{\partial\vartheta}{\partial v}\frac{\partial\vartheta}{\partial w}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial w\partial u} = -b'\vartheta^{-3} + 3\vartheta^{-3}\frac{\partial\vartheta}{\partial w}\frac{\partial\vartheta}{\partial u}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} = -c'\vartheta^{-3} + 3\vartheta^{-3}\frac{\partial\vartheta}{\partial u}\frac{\partial\vartheta}{\partial v}$$

Отсюда, принимая во внимание уравнение $P = \varphi = \vartheta^{-1}$, следует

$$R = -(Aa + Bb + Cc + 2A'a' + 2B'b' + 2C'c')\vartheta^{-3} + 3\vartheta^{-3}$$

Но

$$Aa + Bb + Cc = 1$$

$$A'a' + B'b' + C'c' = 1$$

и, таким образом,

$$R = 0$$

Отсюда далее также следует $Q = 0$.

Имеем, таким образом, следующий результат. Полагая

$$\vartheta(u, v, w) = \sqrt{\left(\frac{BC - A'A'}{G} u^2 + \frac{CA - B'B'}{G} v^2 + \frac{AB - C'C'}{G} w^2 + \right.}$$

$$\overline{\left. + 2\frac{B'C' - AA'}{G} vw + 2\frac{C'A' - BB'}{G} wu + 2\frac{A'B' - CC'}{G} uv\right)}$$

и

$$F = D^t \iiint\limits_{[\vartheta^2 (u, v, w) < t^2]} \frac{f(x+u, y+v, z+w)}{\vartheta(u, v, w)} du\, dv\, dw$$

где интегрирование распространяется на все точки пространства, для которых $\vartheta^2(u, v, w) < t^2$ (t_0 принято равным нулю, что допустимо, так как F не зависит от t_0, а трехкратный интеграл сохраняет смысл, несмотря на то, что для точки O будет $\vartheta = 0$), рассматриваемые дифференциальные уравнения в частных производных будут удовлетворены, если принять, что $\psi = F$. По формуле (1) имеем

$$D_t \iiint \frac{f(x+u, \quad)}{\vartheta(u, v, w)} du\, dv\, dw = \int \frac{f(x+u, \quad)}{\vartheta \sqrt{\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial w}\right)^2}} d\sigma_t =$$

$$= \int \frac{f(x+u, \quad)}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}} d\sigma_t$$

где $d\sigma_t$ — элемент поверхности, представленной уравнением

$$au^2 + bv^2 + cw^2 + 2a'vw + 2b'wu + 2c'uv = t^2$$

Отсюда далее следует

$$F = \int \frac{f(x + tu, y + tv, z + tw)}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}} d\sigma$$

если под $d\sigma$ понимать элемент поверхности

$$au^2 + bv^2 + cw^2 + 2a'vw + 2b'wu + 2c'uv = 1$$

а под u, v, w — координаты соответствующей точки, и интегрирование распространять на всю поверхность.

Предыдущее имеет место прежде всего в предположении, что t положительно. Но для положительных значений t

$$\iiint\limits_{[\vartheta^2(u,v,w)<t^2]} \frac{f(x+u, \ldots)\,du\,dv\,dw}{\vartheta(u,v,w)} =$$

$$= \int_0^t \left(\int \frac{f(x+\tau u, y+\tau v, z+\tau w)}{\sqrt{U^2+V^2+W^2}}\,d\sigma \right) \tau\,d\tau$$

Выражение в правой части имеет теперь также смысл и для отрицательных значений t и остается без изменения при замене t на $-t$, так как

$$\int_0^{-t} \left(\int \frac{f(x+\tau u, y+\tau v, z+\tau w)}{\sqrt{U^2+V^2+W^2}}\,d\sigma \right) \tau\,d\tau =$$

$$= \int_0^t \left(\int \frac{f(x-\tau u, y-\tau v, z-\tau w)}{\sqrt{U^2+V^2+W^2}}\,d\sigma \right) \tau\,d\tau$$

Но для каждой поверхности σ, обладающей тем свойством, что она пересекается каждой прямой, выходящей из O, в двух равноотстоящих от нее точках, для произвольной функции $f(u, v, w)$ имеет место

$$\int f(u,v,w)\,d\sigma = \int f(-u,-v,-w)\,d\sigma$$

Таким образом, трехкратный интеграл, производная которого по t равна F, есть *четная* функция t, само F, следовательно, *нечетная* функция t. Но если данное дифференциальное уравнение, предполагая ψ четной или нечетной функцией от t, для всех положительных значений t удовлетворяется, то оно удовлетворяется и для отрицательных значений t.

Для $t=0$ будет $F=0$ и

$$\frac{\partial F}{\partial t} = f(x,y,z) \int \frac{d\sigma}{\sqrt{U^2+V^2+W^2}}$$

Но

$$\iiint\limits_{(\vartheta^2<1)} \frac{du\,dv\,dw}{\vartheta(u,v,w)} = \int\limits_0^1 \left(\int \frac{d\sigma}{\sqrt{U^2+V^2+W^2}}\right)\tau\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d\sigma}{\sqrt{U^2+V^2+W^2}}$$

Поэтому, если положить

$$\iiint\limits_{(\vartheta^2<1)} \frac{du\,dv\,dw}{\vartheta(u,v,w)} = \tilde{\omega}$$

и

$$\psi = \frac{1}{2\tilde{\omega}} D_t \iiint \frac{f(x+u,y+v,z+w)}{\vartheta(u,v,w)}\,du\,dv\,dw$$

то ψ будет функцией, которая удовлетворяет предыдущему дифференциальному уравнению и одновременно для $t=0$ условиям

$$\psi = 0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t} = f(x,y,z)$$

Отсюда тотчас следует, что общее решение получим, если введем произвольную функцию $F(x,y,z)$ и положим

$$\psi = \frac{1}{2\tilde{\omega}} D_t^2 \iiint\limits_{(\vartheta^2<1)} \frac{F(x+u,y+v,z+w)}{\vartheta(u,v,w)}\,du\,dv\,dw +$$

$$+ \frac{1}{2\tilde{\omega}} D_t \iiint\limits_{(\vartheta^2<1)} \frac{f(x+u,y+v,z+w)}{\vartheta(u,v,w)}\,du\,dv\,dw$$

Так как тогда для $t=0$

$$\psi = F(x,y,z), \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t} = f(x,y,z)$$

Вводя вместо u, v, w три другие переменные p, q, r:

$$p = \alpha u + \beta v + \gamma w$$
$$q = \alpha' u + \beta' v + \gamma' w$$
$$r = \alpha'' u + \beta'' v + \gamma'' w$$

можно постоянные α, β и т. д. определить так, что

$$u^2 + v^2 + w^2$$

переходит в

$$p^2 + q^2 + r^2$$

и

$$au^2 + bv^2 + cw^2 + 2a'vw + 2b'wu + 2c'uv$$

переходит в

$$gp^2 + hq^2 + kr^2$$

где g, h, k — положительные постоянные. Тогда вместо

$$\frac{du\,dv\,dw}{\vartheta(u, v, w)}$$

нужно положить

$$\frac{dp\,dq\,dr}{\sqrt{gp^2 + hq^2 + kr^2}}$$

и интегрирование распространить на все значения p, q, r, для которых

$$gp^2 + hq^2 + kr^2 < t^2$$

Это получится, если положить

$$p = \sqrt{g}\,\tau \cos\lambda, \quad q = \sqrt{h}\,\tau \sin\lambda \cos\mu, \quad r = \sqrt{k}\,\tau \sin\lambda \sin\mu$$

и если

τ принимает все значения от 0 до t

λ принимает все значения от 0 до π

μ принимает все значения от 0 до 2π

Тогда

$$\frac{dp\,dq\,dr}{\sqrt{gp^2 + hq^2 + kr^2}}$$

должно быть заменено через

$$\frac{\tau^2 \sin\lambda\, d\tau\, d\lambda\, d\mu}{\sqrt{ghk}}.$$

при этом нужно заметить, что

$$ghk = \frac{1}{G}$$

Согласно этому, когда $X(u, v, w)$ произвольная функция u, v, w, имеем

$$\iiint\limits_{(\vartheta^2 < t^2)} \frac{X(u, v, w)\,du\,dv\,dw}{\vartheta(u, v, w)} = \int\limits_0^t \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{G}\,X(\tau u_1, \tau v_1, \tau w_1)\,\tau^2 \sin\lambda\,d\mu\,d\lambda\,d\tau$$

где

$$u_1 = \alpha\sqrt{g}\cos\lambda + \beta\sqrt{h}\sin\lambda\cos\mu + \gamma\sqrt{k}\sin\lambda\sin\mu$$

$$v_1 = \alpha'\sqrt{g}\cos\lambda + \beta'\sqrt{h}\sin\lambda\cos\mu + \gamma'\sqrt{k}\sin\lambda\sin\mu$$

$$w_1 = \alpha''\sqrt{g}\cos\lambda + \beta''\sqrt{h}\sin\lambda\cos\mu + \gamma''\sqrt{k}\sin\lambda\sin\mu$$

Полагая $X(u, v, w) = 1$, получим

$$\tilde{\omega} = \sqrt{G}\int\limits_0^t \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} \tau^2 \sin\lambda\,d\tau\,d\lambda\,d\mu = 2\pi\sqrt{G}$$

Мы имеем, следовательно, результат.

Пусть $F(x, y, z)$, $f(x, y, z)$ — две произвольные функции переменных x, y, z,

$$G = ABC - AA'A' - BB'B' - CC'C' + 2A'B'C'$$

$$\vartheta(u, v, w) = \sqrt{\left(\frac{BC - A'A'}{G}u^2 + \frac{CA - B'B'}{G}v^2 + \frac{AB - C'C'}{G}w^2 + \right.}$$
$$\overline{\left. + 2\frac{B'C' - AA'}{G}vw + 2\frac{C'A' - BB'}{G}wu + 2\frac{A'B' - CC'}{G}uv\right)}$$

$$F(x, y, z, t) = \iiint\limits_{[\vartheta^2(u, v, w) < t^2]} \frac{F(x + u, y + v, z + w)}{\vartheta(u, v, w)}\,du\,dv\,dw$$

$$f(x, y, z, t) = \iiint\limits_{[\vartheta^2(u, v, w) < t^2)} \frac{f(x + u, y + v, z + w)}{\vartheta(u, v, w)}\,du\,dv\,dw$$

Тогда

$$\psi = \frac{1}{4\pi\sqrt{G}}\left(\frac{\partial^2 F(x, y, z, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial t}\right)$$

есть функция x, y, z, t, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = A\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + C\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + 2A'\frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial z} + 2B'\frac{\partial^2\psi}{\partial z\,\partial x} + 2C'\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}$$

и одновременно построенная так, что для $t = 0$

$$\psi = F(x, y, z), \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t} = f(x, y, z)$$

При этом все три величины

$$A, \quad AB - C'C', \quad G$$

должны быть положительными.

Если имеем уравнение

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)$$

то

$$\sqrt{G} = a^3, \qquad \vartheta(u, v, w) = \frac{1}{a^2}\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{G}}F(x, y, z, t) = \iiint\limits_{(u^2+v^2+w^2<a^2t^2)} \frac{F(x+u, y+v, z+w)}{a^2\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\,du\,dv\,dw$$

$$\frac{1}{\sqrt{G}}f(x, y, z, t) = \iiint\limits_{(u^2+v^2+w^2<a^2t^2)} \frac{f(x+u, y+v, z+w)}{a^2\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\,du\,dv\,dw$$

Если уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + b^2\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + c^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

то

$$\sqrt{G} = abc, \qquad \vartheta^2 = \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{w^2}{c^2}$$

следовательно,

$$4\, abc\, \pi\psi = \frac{\partial^2 F(x, y, z, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial t}$$

$$F(x, y, z, t) = \iiint \frac{F(x+u, y+v, z+w)}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{w^2}{c^2}}}\, du\, dv\, dw$$

$$f(x, y, z, t) = \iiint \frac{f(x+u, y+v, z+w)}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{w^2}{c^2}}}\, du\, dv\, dw$$

$$\left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{w^2}{c^2} < t^2\right)$$

Интегрирование следующей системы дифференциальных уравнений в частных производных

(F)

$$[D_t^2 - a^2(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)]\,\xi - (b^2 - a^2)\, D_x\,(D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta) = 0$$

$$[D_t^2 - a^2(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)]\,\eta - (b^2 - a^2)\, D_y\,(D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta) = 0$$

$$[D_t^2 - a^2(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)]\,\zeta - (b^2 - a^2)\, D_z\,(D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta) = 0$$

(в которых a, b — положительные постоянные, t, x, y, z — неограниченные действительные переменные, ξ, η, ζ — подлежащие определению функции этих переменных) можно свести к интегрированию дифференциального уравнения

$$(D_t^2 - D_x^2 - D_y^2 - D_z^2)\, f = 0$$

Прежде всего, по правилам сведения интегрирования такой системы дифференциальных уравнений в частных производных к одному уравнению с одной неизвестной функцией можно положить

$$\begin{aligned} \xi &= [D_t^2 - b^2 (D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)] \varphi_1 + \\ &\quad + (b^2 - a^2) D_x (D_x \varphi_1 + D_y \varphi_2 + D_z \varphi_3) \\ \eta &= [D_t^2 - b^2 (D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)] \varphi_2 + \\ &\quad + (b^2 - a^2) D_y (D_x \varphi_1 + D_y \varphi_2 + D_z \varphi_3) \\ \zeta &= [D_t^2 - b^2 (D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)] \varphi_3 + \\ &\quad + (b^2 - a^2) D_z (D_x \varphi_1 + D_y \varphi_2 + D_z \varphi_3) \end{aligned} \tag{G}$$

где φ_1, φ_2, φ_3 — три функции от t, x, y, z, каждая из которых удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(D_t^2 - a^2 \triangle)(D_t^2 - b^2 \triangle) \varphi = 0$$

в котором для сокращения обозначено

$$\triangle = D_x^2 + D_y^2 + D_z^2$$

Пусть $f(t, x, y, z)$ или, короче, $f(t)$ обозначает некоторую функцию от t, x, y, z, удовлетворяющую уравнению

$$(D_t^2 - \triangle) f(t) = 0$$

и *нечетную* относительно t.

Далее, пусть $\psi(t, x, y, z)$ или $\psi(t)$ есть некоторая функция, также *нечетная* относительно t и удовлетворяющая уравнению

$$D_t^2 \psi(t) = f(t)$$

Тогда имеем

$$(D_t^2 - \triangle) D_t^2 \psi(t) = 0$$

или

$$D_t^2 [(D_t^2 - \triangle) \psi(t)] = 0$$

откуда, при учете того обстоятельства, что $(D_t^2 - \triangle)\psi(t)$ есть нечетная функция t, следует

$$(D_t^2 - \triangle)\,\psi(t) = \psi_0\, t$$

где ψ_0 зависит только от x, y, z. Подставляя в это уравнение at вместо t, получим

$$\frac{1}{a^2} D_t^2\psi(at) - \triangle\,\psi(at) = \psi_0\, at$$

или

$$(D_t^2 - a^2\triangle)\,\psi(at) = a^3 t\,\psi_0$$

и аналогично

$$(D_t^2 - b^2\triangle)\,\psi(bt) = b^3 t\,\psi_0$$

Поэтому

$$(D_t^2 - a^2\triangle)(D_t^2 - b^2\triangle)\,\psi(at) = -a^3 b^2 t\,\triangle\psi_0$$

$$(D_t^2 - a^2\triangle)(D_t^2 - b^2\triangle)\,\psi(bt) = -a^2 b^3 t\,\triangle\,\psi_0$$

$$(D_t^2 - a^2\triangle)(D_t^2 - b^2\triangle)\left(\frac{1}{a}\,\psi(at) - \frac{1}{b}\,\psi(bt)\right) = 0$$

Полагая поэтому

$$\varphi = \frac{\frac{1}{a}\,\psi(at) - \frac{1}{b}\,\psi(bt)}{a^2 - b^2}$$

получим

$$(D_t^2 - a^2\triangle)(D_t^2 - b^2\triangle)\,\varphi = 0 \qquad \text{(H)}$$

Одновременно имеем для $t = 0$

$$\varphi = 0, \qquad D_t\varphi = 0, \qquad D_t^2\varphi = 0,$$

$$D_t^3 = \left(\frac{a^2\,\psi'''(at) - b^2\,\psi'''(at)}{a^2 - b^2}\right)_{t=0} = \psi'''(0) = f'(0)$$

Следовательно, если определить $f(t, x, y, z)$ так, что для $t=0$

$$D_t f(t, x, y, z) = F(x, y, z) \qquad \text{(I)}$$

то φ будет тот интеграл уравнения (H), который для $t=0$ удовлетворяет условию

$$\varphi=0, \quad D_t\varphi=0, \quad D_t^2\varphi=0, \quad D_t^3\varphi=F(x,y,z)$$

При этом φ есть нечетная функция t.

Определяем теперь три такие функции $f_1(t,x,y,z)$, $f_2(t,x,y,z)$, $f_3(t,x,y,z)$, которые, будучи подставлены вместо f в уравнение (I), удовлетворяют ему, обозначая через φ_1, φ_2, φ_3 функции, полученные из f_1, f_2, f_3 так, как φ получено из f, и подставляя их в уравнения (G), получим для ξ, η, ζ выражения, которые удовлетворяют уравнениям (F) и притом так, что для $t=0$

$$\begin{aligned} \xi&=0, & D_t\xi&=f_1'(0,x,y,z)\\ \eta&=0, & D_t\eta&=f_2'(0,x,y,z)\\ \zeta&=0, & D_t\zeta&=f_3'(0,x,y,z)\end{aligned}$$

При этом нужно заметить, что так как

$$\triangle\psi(at)=\frac{1}{a^2}D_t^2\psi(at)-a\psi_0 t=f(at)-a\psi_0 t$$

то имеем

$$b^2\triangle\psi(at)=b^2f(at)-ab^2\psi_0 t$$

$$(D_t^2-b^2\triangle)\psi(at)=ab^2\psi_0 t+(a^2-b^2)f(at)$$

и поэтому

$$(D_t^2-b^2\triangle)\varphi=(D_t^2-b^2\triangle)\frac{\frac{1}{a}\psi(at)-\frac{1}{b}\psi(bt)}{a^2-b^2}=$$

$$=\frac{(a^2-b^2)\frac{f(at)}{a}+b^2\psi_0 t-b^2\psi_0 t}{a^2-b^2}=\frac{1}{a}f(at)$$

Следовательно, уравнения (G) можно также записать в виде

$$\xi = \frac{1}{a} f_1(at) - D_x \Big\{ D_x \Big[\frac{1}{a} \psi_1(at) - \frac{1}{b} \psi_1(bt) \Big] +$$

$$+ D_y \Big[\frac{1}{a} \psi_2(at) - \frac{1}{b} \psi_2(bt) \Big] + D_z \Big[\frac{1}{a} \psi_3(at) - \frac{1}{b} \psi_3(bt) \Big] \Big\}$$

$$\eta = \frac{1}{a} f_2(at) - D_y \Big\{ D_x \Big[\frac{1}{a} \psi_1(at) - \frac{1}{b} \psi_1(bt) \Big] +$$

$$+ D_y \Big[\frac{1}{a} \psi_2(at) - \frac{1}{b} \psi_2(bt) \Big] + D_z \Big[\frac{1}{a} \psi_3(at) - \frac{1}{b} \psi_3(bt) \Big] \Big\}$$

$$\zeta = \frac{1}{a} f_3(at) - D_z \Big\{ D_x \Big[\frac{1}{a} \psi_1(at) - \frac{1}{b} \psi_1(bt) \Big] +$$

$$+ D_y \Big[\frac{1}{a} \psi_2(at) - \frac{1}{b} \psi_2(bt) \Big] + D_z \Big[\frac{1}{a} \psi_3(at) - \frac{1}{b} \psi_3(bt) \Big] \Big\}$$

Далее,

$$\psi_1(t) = \int_0^t (t-\tau) f_1(\tau) \, d\tau + \psi_0^{(1)} t$$

$$\psi_2(t) = \int_0^t (t-\tau) f_2(\tau) \, d\tau + \psi_0^{(2)} t$$

$$\psi_3(t) = \int_0^t (t-\tau) f_3(\tau) \, d\tau + \psi_0^{(3)} t$$

и поэтому

$$\frac{1}{a} \psi_1(at) - \frac{1}{b} \psi_1(bt) = \int_0^{at} \Big(t - \frac{\tau}{a} \Big) f_1(\tau) \, d\tau -$$

$$- \int_0^{bt} \Big(t - \frac{\tau}{b} \Big) f_1(\tau) \, d\tau = \int_0^{t} (t-\tau) [a f_1(a\tau) - b f_1(b\tau)] \, d\tau$$

и т. д.

К интегрированию уравнения

$$(D_t^2 - a^2 \triangle)(D_t^2 - b^2 \triangle)\varphi = 0$$

можно также притти следующим образом.

Пусть будет

$$\varphi(t, a)$$

некоторая функция от t, удовлетворяющая уравнению

$$(D_t^2 - a^2 \triangle)\varphi(t, a) = 0$$

и условиям, что для $t = 0$

$$\varphi(t, a) = 0, \qquad D_t \varphi(t, a) = G(x, y, z)$$

где G — произвольная функция от x, y, z.

Аналогично $\varphi(t, b)$ определяется уравнением

$$(D_t^2 - b^2 \triangle)\varphi(t, b) = 0$$

и условием, что для $t = 0$

$$\varphi(t, b) = 0, \qquad D_t \varphi(t, b) = G(x, y, z)$$

Тогда $\varphi(t, a)$, $\varphi(t, b)$ будут обе нечетными функциями от t. Если положить

$$\varphi(t) = \varphi(t, b) - \varphi(t, a)$$

то $\varphi(t)$ будет удовлетворять уравнению

$$(D_t^2 - a^2 \triangle)(D_t^2 - b^2 \triangle)\varphi = 0$$

и для $t = 0$ будем иметь

$$\varphi(t) = 0, \quad D_t \varphi(t) = 0, \quad D_t^2 \varphi(t) = 0$$

$$D_t^3 \varphi(t) = D_t^3 \varphi(t, a) - D_t^3 \varphi(t, b)$$

Но

$$D_t^3 \varphi(t, a) = a^2 \triangle D_t \varphi(t, a)$$

и поэтому

$$[D_t^3 \varphi(t, a)]_{t=0} = a^2 \triangle G$$

И аналогично

$$[D_t^3 \varphi(t, b)]_{t=0} = b^2 \triangle G$$

Следовательно,

$$[D_t^3 \varphi(t)]_{t=0} = (b^2 - a^2) \triangle G$$

Определим поэтому G так, чтобы

$$(b^2 - a^2) \triangle G = f(x, y, z)$$

тогда $\varphi(t)$ есть такая функция, которая удовлетворяет рассматриваемому уравнению и условиям, что для $t = 0$

$$\varphi(t) = 0, \qquad D_t \varphi(t) = 0, \qquad D_t^2 \varphi(t) = 0, \qquad D_t^3 \varphi(t) = f$$

Полагая

$$D_t^2 \varphi(t, a) = \varphi''(t, a), \qquad D_t^2 \varphi(t, b) = \varphi''(t, b)$$

имеем также

$$(D_t^2 - a^2 \triangle) \varphi''(t, a) = 0, \qquad (D_t^2 - b^2 \triangle) \varphi''(t, b) = 0$$

и для $t = 0$

$$\varphi''(t, a) = 0, \qquad D_t \varphi''(t, a) = a^2 \triangle G = \frac{a^2}{b^2 - a^2} f$$

$$\varphi''(t, b) = 0, \qquad D_t \varphi''(t, b) = b^2 \triangle G = \frac{b^2}{b^2 - a^2} f$$

Следовательно,

$$\frac{b^2 - a^2}{a^2} \varphi''(t, a)$$

будет такой функцией, которая удовлетворяет уравнению

$$(D_t^2 - a^2 \triangle) F = 0$$

и условию, что для $t = 0$

$$F = 0, \qquad D_t F = f$$

Следовательно,

$$\frac{b^2-a^2}{a^2}\varphi''(t, a) = \frac{1}{a} f(at)$$

и аналогично

$$\frac{b^2-a^2}{b^2}\varphi''(t, b) = \frac{1}{b} f(bt)$$

Отсюда следует

$$\varphi(t, a) = \frac{a}{b^2-a^2}\int\limits_0\int\limits_0 f(at)\,dt\,dt + tG$$

$$\varphi(t, b) = \frac{b}{b^2-a^2}\int\limits_0\int\limits_0 f(bt)\,dt\,dt + tG$$

Пусть $\psi(t)$ — некоторая функция t, вторая производная которой равна $f(t)$ и равная нулю при $t=0$; тогда имеем

$$D_t^2\psi(at) = a^2 f(at)$$

$$a\int\limits_0\int\limits_0 f(at)\,dt\,dt = \frac{1}{a}\psi(at) - t\,\psi'(0)$$

где

$$\psi'(0) = [D_t\psi(t)]_{t=0}$$

Следовательно,

$$\varphi(t, a) = \frac{1}{a(b^2-a^2)}\psi(at) + t\left[G - \frac{1}{b^2-a^2}\psi'(0)\right]$$

и

$$\varphi(t) = \frac{1}{[b^2-a^2}\left[\frac{1}{b}\psi(bt) - \frac{1}{a}\psi(at)\right]$$

Предыдущие формулы дают общие интегралы уравнений (1) для случая, когда ξ, η, ζ равны нулю при $t=0$, следовательно, во всяком случае также, когда ξ, η, ζ — нечетные функции t.

Выбирая три выражения такого же вида, но в которых f_1, f_2, f_3 заменены тремя другими функциями, образуя из них производные по t и прибавляя их соответственно к ξ, η, ζ, получим общие выражения этих величин.

Получается, таким образом, следующий результат.

Определяем шесть функций:

$$f_1(t, x, y, z), \quad f_2(t, x, y, z), \quad f_3(t, x, y, z)$$
$$F_1(t, x, y, z), \quad F_2(t, x, y, z), \quad F_3(t, x, y, z)$$

которые, будучи подставлены вместо f, удовлетворяют уравнению

$$(D_t^2 - D_x^2 - D_y^2 - D_z^2) f = 0$$

и, кроме того, все равны нулю при $t=0$.

Далее пусть

$$\psi_1(t, x, y, z), \quad \psi_2(t, x, y, z), \quad \psi_3(t, x, y, z)$$
$$\Psi_1(t, x, y, z), \quad \Psi_2(t, x, y, z), \quad \Psi_3(t, x, y, z)$$

такие шесть функций, вторые производные которых по t соответственно равны

$$f_1, \quad f_2, \quad f_3$$
$$F_1, \quad F_2, \quad F_3$$

и которые также все равны нулю при $t=0$. Положим

$$\psi(t, x, y, z) = D_x \psi_1(t, x, y, z) + D_y \psi_2(t, x, y, z) + \\ + D_z \psi_3(t, x, y, z)$$

$$\Psi(t, x, y, z) = D_x \Psi_1(t, x, y, z) + D_y \Psi_2(t, x, y, z) + \\ + D_z \Psi_3(t, x, y, z)$$

Тогда выражения для ξ, η, ζ

$$\xi = \frac{1}{a} f_1(at) + \frac{1}{a} D_t F_1(at) + \\ + D_x \left(\frac{1}{b} \psi(bt) - \frac{1}{a} \psi(at) + \frac{1}{b} D_t \Psi(bt) - \frac{1}{a} D_t \Psi(at) \right)$$

$$\eta = \frac{1}{a} f_2(at) + \frac{1}{a} D_t F_2(at) + \\ + D_y \left(\frac{1}{b} \psi(bt) - \frac{1}{a} \psi(at) + \frac{1}{b} D_t \Psi(bt) - \frac{1}{a} D_t \Psi(at) \right)$$

$$\zeta = \frac{1}{a} f_3(at) + \frac{1}{a} D_t F_3(at) + \\ + D_z \left(\frac{1}{b} \psi(bt) - \frac{1}{a} \psi(at) + \frac{1}{b} D_t \Psi(bt) - \frac{1}{a} D_t \Psi(at) \right)$$

будут общими интегралами уравнений (1).

Отсюда получаются далее, с некоторым изменением в обозначениях, интегралы следующих дифференциальных уравнений

$$(D_t^2 - a^2 \triangle)\xi - (b^2 - a^2) D_x \vartheta = P(t, x, y, z)$$
$$(D_t^2 - a^2 \triangle)\eta - (b^2 - a^2) D_y \vartheta = Q(t, x, y, z)$$
$$(D_t^2 - a^2 \triangle)\zeta - (b^2 - a^2) D_z \vartheta = R(t, x, y, z)$$

в которых

$$\vartheta = D_x \xi + D_y \eta + D_z \zeta$$

и P, Q, R — данные функции от t, x, y, z.

Определяем шесть функций:

$$F_1(t), \quad F_2(t), \quad F_3(t)$$
$$F_1'(t), \quad F_2'(t), \quad F_3'(t)$$

от t и x, y, z, которые, будучи подставлены вместо f в уравнение

$$(D_t^2 - \triangle) F = 0$$

удовлетворяют ему и, кроме того, все равны нулю при $t = 0$.

Далее пусть будут

$$\varphi_1(t),\quad \varphi_2(t),\quad \varphi_3(t)$$

$$\varphi_1'(t),\quad \varphi_2'(t),\quad \varphi_3'(t)$$

функции, вторые производные которых по t соответственно равны вышеупомянутым шести функциям и также равны нулю при $t=0$.

Наконец, пусть

$$F_1''(t,\tau)\qquad F_2''(t,\tau)\qquad F_3''(t,\tau)$$

где τ — некоторая неопределенная величина, — три функции, которые также удовлетворяют уравнению

$$(D_t^2-\triangle)\,F=0$$

и, кроме того, определены так, что для $t=0$

$$F_1''=0,\quad F_2''=0,\quad F_3''=0$$

$$D_tF_1''=P(\tau,x,y,z),\quad D_tF_2''=Q(\tau,x,y,z),$$

$$D_tF_3''=R(\tau,x,y,z)$$

Обозначая тогда через

$$\varphi_1''(t,\tau),\quad \varphi_2''(t,\tau),\quad \varphi_3''(t,\tau)$$

функции, вторые производные которых по t суть

$$F_1'',\ F_2'',\ F_3''$$

и также равные нулю при $t=0$, и полагая

$$\varphi(t)=D_x\varphi_1(t)+D_y\varphi_2(t)+D_z\varphi_3(t)$$

$$\varphi'(t)=D_x\varphi_1'(t)+D_y\varphi_2'(t)+D_z\varphi_3'(t)$$

имеем

$$\varphi''(t, \tau) = D_x \varphi_1''(t, \tau) + D_y \varphi_2''(t, \tau) + D_z \varphi_3''(t, \tau)$$

$$\xi = D_t\left\{\frac{1}{a} F_1 (at) + D_x\left(\frac{1}{b}\varphi(bt) - \frac{1}{a}\varphi(at)\right)\right\} + \\ + \frac{1}{a} F_1'(at) + D_x\left(\frac{1}{b}\varphi'(bt) - \frac{1}{a}\varphi'(at)\right) + \\ + \int_0^t \left\{\frac{1}{a} F_1''(at - a\tau, \tau) + D_x\left(\frac{1}{b}\varphi''(bt - b\tau, \tau)\right) - \\ - \frac{1}{a}\varphi''(at - a\tau, \tau)\right)\right\} d\tau$$

$$\eta = D_t\left\{\frac{1}{a} F_2(at) + D_y\left(\frac{1}{b}\varphi(bt) - \frac{1}{a}\varphi(at)\right)\right\} + \\ + \frac{1}{a} F_2'(at) + D_y\left(\frac{1}{b}\varphi'(bt) - \frac{1}{a}\varphi'(at)\right) + \\ + \int_0^t \left\{\frac{1}{a} F_2''(at - a\tau, \tau) + D_y\left(\frac{1}{b}\varphi''(bt - b\tau, \tau) - \\ - \frac{1}{a}\varphi''(at - a\tau, \tau)\right)\right\} d\tau$$

$$\zeta = D_t\left\{\frac{1}{a} F_3(at) + D_z\left(\frac{1}{b}\varphi(bt) - \frac{1}{a}\varphi(at)\right)\right\} + \\ + \frac{1}{a} F_3'(at) + D_z\left(\frac{1}{b}\varphi'(bt) - \frac{1}{a}\varphi'(at)\right) + \\ + \int_0^t \left\{\frac{1}{a} F_3''(at - a\tau, \tau) + D_z\left(\frac{1}{b}\varphi''(bt - b\tau, \tau)\right) - \\ - \frac{1}{a}\varphi''(at - a\tau, \tau)\right)\right\} d\tau$$

Чтобы получить из этих формул выражения для $D_t\xi$, $D_t\eta$, $D_t\zeta$, нужно в формулах, содержащих функции F'', φ'', продифференцировать по t *под* знаком интеграла.

Обозначая через

$$f_1\ (x, y, z),\quad f_2\ (x, y, z),\quad f_3\ (x, y, z)$$
$$f_1'\ (x, y, z),\quad f_2'\ (x, y, z),\quad f_3'\ (x, y, z)$$

функции, в которые переходят

$$D_t F_1\ (t),\quad D_t F_2\ (t),\quad D_t F_3\ (t)$$
$$D_t F_1'\ (t),\quad D_t F_2'\ (t),\quad D_t F_3'\ (t)$$

при $t = 0$, имеем при $t = 0$

$$\xi = f_1\ (x, y, z),\qquad \eta = f_2\ (x, y, z),\qquad \zeta = f_3\ (x, y, z)$$
$$D_t\xi = f_1'\ (x, y, z),\qquad D_t\eta = f_2'\ (x, y, z),\qquad D_t\zeta = f_3\ (x, y, z)$$

При этом при определении функций F функции f могут быть приняты произвольными."

Чтобы применить в данном случае метод господина Вейерштрасса, разобранный на предыдущих страницах, я полагаю

$$\begin{aligned} \xi &= D_t \int \varphi_1 (u, v, w)\, f\,(x + u, y + v, z + w)\, d\omega \\ \eta &= D_t \int \varphi_2 (u, v, w)\, f\,(x + u, y + v, z + w)\, d\omega \\ \zeta &= D_t \int \varphi_3 (u, v, w)\, f\,(x + u, y + v, z + w)\, d\omega \end{aligned} \qquad (3)$$

где интегрирование в правой части распространяется на все точки пространства, ограниченного некоторой замкнутой поверхностью, уравнение которой $\vartheta\,(u, v, w) = t$.

Я хочу так определить четыре функции $\vartheta\ (u, v, w)$, $\varphi_1 (u, v, w)$, $\varphi_2 (u, v, w)$, $\varphi_3 (u, v, w)$, чтобы этими значениями ξ, η, ζ удовлетворить дифференциальным уравнениям (1), причем $f\,(x+u,\ y + v,\ z + w)$ остается совершенно произвольной.

Применяя обе формулы преобразования (A) и (B), я образую сначала выражения

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x},\quad \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y},\quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z}$$

Я нахожу

$$\frac{\partial\xi}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial x}=D_t^2\int\left(\varphi_1\frac{\partial\vartheta}{\partial v}-\varphi_2\frac{\partial\vartheta}{\partial u}\right)f(x+u,\ y+v,\ z+w)\,d\omega-$$
$$-D_t\int\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial v}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\right)f(x+u,\ y+v,\ z+w)\,d\omega$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial z}-\frac{\partial\zeta}{\partial y}=D_t^2\int\left(\varphi_2\frac{\partial\vartheta}{\partial w}-\varphi_3\frac{\partial\vartheta}{\partial v}\right)f(x+u,\ y+v,\ z+w)\,d\omega-$$
$$-D_t\int\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial w}-\frac{\partial\varphi_3}{\partial v}\right)f(x+u,\ y+v,\ z+w)\,d\omega$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial z}=D_t^2\int\left(\varphi_3\frac{\partial\vartheta}{\partial u}-\varphi_1\frac{\partial\vartheta}{\partial w}\right)f(x+u,\ y+v,\ z+w)\,d\omega-$$
$$-D_t\int\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial u}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial w}\right)f(x+u,\ y+v,\ z+w)\,d\omega$$

Вторые члены в правой части этих уравнений равны нулю, если я положу

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial v}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}=0,\qquad \frac{\partial\varphi_2}{\partial w}-\frac{\partial\varphi_3}{\partial v}=0,\qquad \frac{\partial\varphi_3}{\partial u}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial w}=0 \tag{4}$$

Эти уравнения удовлетворяются для

$$\varphi_1=\frac{\partial\varphi}{\partial u},\quad \varphi_2=\frac{\partial\varphi}{\partial v},\quad \varphi_3=\frac{\partial\varphi}{\partial w},$$

где φ — любая функция от u, v, w, которая впоследствии должна быть определена.

Я полагаю далее

$$\begin{aligned}
\psi_1(u,v,w)&=\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\vartheta}{\partial w}-\frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{\partial\vartheta}{\partial v}\\
\psi_2(u,v,w)&=\frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{\partial\vartheta}{\partial u}-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\vartheta}{\partial w}\\
\psi_3(u,v,w)&=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\vartheta}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\vartheta}{\partial u}
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\xi_1 = D_t^2 \int \psi_1(u, v, w) f(x+u, y+v, z+w) d\omega$$

$$\eta_1 = D_t^2 \int \psi_2(u, v, w) f(x+u, y+v, z+w) d\omega$$

$$\zeta_1 = D_t^2 \int \psi_3(u, v, w) f(x+u, y+v, z+w) d\omega$$

Тогда из дифференциальных уравнений (1) получается

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} - b^2 \frac{\partial \eta_1}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial \xi_1}{\partial z} - c^2 \frac{\partial \zeta_1}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial \eta_1}{\partial x} - a^2 \frac{\partial \xi_1}{\partial y}$$

Преобразуя выражения

$$c^2 \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} - b^2 \frac{\partial \eta_1}{\partial z}, \qquad a^2 \frac{\partial \xi_1}{\partial z} - c^2 \frac{\partial \zeta_1}{\partial x}, \qquad b^2 \frac{\partial \eta_1}{\partial x} - a^2 \frac{\partial \xi_1}{\partial y}$$

с помощью формул преобразования Вейерштрасса, подобно тому, как это было сделано для ξ, η, ζ, я нахожу

$$c^2 \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} - b^2 \frac{\partial \eta_1}{\partial z} = D_t^3 \int \left(c^2 \psi_3 \frac{\partial \vartheta}{\partial v} - b^2 \psi_2 \frac{\partial \vartheta}{\partial w} \right) f(x+u, y+v, z+w) d\omega -$$

$$- D_t^2 \int \left(c^2 \frac{\partial \psi_3}{\partial v} - b^2 \frac{\partial \psi_2}{\partial w} \right) f(x+u, y+v, z+w) d\omega$$

$$a^2 \frac{\partial \xi_1}{\partial z} - c^2 \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} = D_t^3 \int \left(a^2 \psi_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial w} - c^2 \psi_3 \frac{\partial \vartheta}{\partial u} \right) f(x+u, y+v, z+w) d\omega -$$

$$- D_t^2 \int \left(a^2 \frac{\partial \psi_1}{\partial w} - c^2 \frac{\partial \psi_3}{\partial u} \right) f(x+u, y+v, z+w) d\omega$$

$$b^2 \frac{\partial \eta_1}{\partial x} - a^2 \frac{\partial \xi_1}{\partial y} = D_t^3 \int \left(b^2 \psi_2 \frac{\partial \vartheta}{\partial u} - a^2 \psi_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial v} \right) f(x+u, y+v, z+w) d\omega -$$

$$- D_t^2 \int \left(b^2 \frac{\partial \psi_2}{\partial u} - a^2 \frac{\partial \psi_1}{\partial v} \right) f(x+u, y+v, z+w) d\omega$$

Уравнения (1) будут удовлетворены при произвольно взятой $f(x+u,\ y+v,\ z+w)$, если я положу

$$
\begin{aligned}
&c^2\frac{\partial\psi_3}{\partial v}-b^2\frac{\partial\psi_2}{\partial w}=0 & \qquad & c^2\psi_3\frac{\partial\vartheta}{\partial v}-b^2\psi_2\frac{\partial\vartheta}{\partial w}=\varphi_1 \\
&a^2\frac{\partial\psi_1}{\partial w}-c^2\frac{\partial\psi_3}{\partial u}=0 \qquad (6) & \qquad & a^2\psi_1\frac{\partial\vartheta}{\partial w}-c^2\psi_3\frac{\partial\vartheta}{\partial u}=\varphi_2 \qquad (7) \\
&b^2\frac{\partial\psi_2}{\partial u}-a^2\frac{\partial\psi_1}{\partial v}=0 & \qquad & b^2\psi_2\frac{\partial\vartheta}{\partial u}-a^2\psi_1\frac{\partial\vartheta}{\partial v}=\varphi_3
\end{aligned}
$$

Уравнения (6) удовлетворяются, если я положу

$$
\psi_1=\frac{1}{a^2}\frac{\partial\psi}{\partial u},\qquad \psi_2=\frac{1}{b^2}\frac{\partial\psi}{\partial v},\qquad \psi_3=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\psi}{\partial w}
$$

Уравнения (5) и (7) вследствие этого приводятся к следующим двум группам уравнений:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\vartheta}{\partial w}-\frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{\partial\vartheta}{\partial v}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial\psi}{\partial u}, & \qquad & \frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\vartheta}{\partial w}-\frac{\partial\psi}{\partial w}\frac{\partial\vartheta}{\partial v}=-\frac{\partial\varphi}{\partial u} \\
&\frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{\partial\vartheta}{\partial u}-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\vartheta}{\partial w}=\frac{1}{b^2}\frac{\partial\psi}{\partial v}, & \qquad & \frac{\partial\psi}{\partial w}\frac{\partial\vartheta}{\partial u}-\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\vartheta}{\partial w}=-\frac{\partial\varphi}{\partial v} \qquad (8) \\
&\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\vartheta}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\vartheta}{\partial u}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\psi}{\partial w}, & \qquad & \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\vartheta}{\partial v}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\vartheta}{\partial u}=-\frac{\partial\varphi}{\partial w}
\end{aligned}
$$

которым должны удовлетворять три подлежащие определению функции φ, ψ, ϑ. Из этих уравнений легко получить такое, в которое входит одна функция $\vartheta(u,\ v,\ w)$. Действительно, если в первую группу уравнений (8) подставить вместо

$$
\frac{\partial\varphi}{\partial u},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial v},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial w}
$$

их значения из второй группы, то находим, если для сокращения обозначить

$$\vartheta_1 = \frac{\partial \vartheta}{\partial u}, \qquad \vartheta_2 = \frac{\partial \vartheta}{\partial v}, \qquad \vartheta_3 = \frac{\partial \vartheta}{\partial w},$$

при следующих уравнения:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{a^2} - \vartheta_2^2 - \vartheta_3^2\right)\frac{\partial \psi}{\partial u} &+ \vartheta_1\vartheta_2 \frac{\partial \psi}{\partial v} &+ \vartheta_1\vartheta_3 \frac{\partial \psi}{\partial w} = 0 \\
+ \vartheta_1\vartheta_2 \frac{\partial \psi}{\partial u} &+ \left(\frac{1}{b^2} - \vartheta_3^2 - \vartheta_1^2\right)\frac{\partial \psi}{\partial v} &+ \vartheta_2\vartheta_3 \frac{\partial \psi}{\partial w} = 0 \\
+ \vartheta_1\vartheta_3 \frac{\partial \psi}{\partial u} &+ \vartheta_2\vartheta_3 \frac{\partial \psi}{\partial v} &+ \left(\frac{1}{c^2} - \vartheta_1^2 - \vartheta_2^2\right)\frac{\partial \psi}{\partial w} = 0
\end{aligned}$$

Это уравнения линейные относительно $\frac{\partial \psi}{\partial u}, \frac{\partial \psi}{\partial v}, \frac{\partial \psi}{\partial w}$. Для того чтобы они были удовлетворены, детерминант

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} - \vartheta_2^2 - \vartheta_3^2 & \vartheta_1\vartheta_2 & \vartheta_1\vartheta_3 \\ \vartheta_1\vartheta_2 & \frac{1}{b^2} - \vartheta_3^2 - \vartheta_1^2 & \vartheta_2\vartheta_3 \\ \vartheta_1\vartheta_3 & \vartheta_2\vartheta_3 & \frac{1}{c^2} - \vartheta_1^2 - \vartheta_2^2 \end{vmatrix}$$

должен равняться нулю.

Если вычислить его и для сокращения обозначить

$$H = \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial w}\right)^2$$

$$F = b^2c^2 \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial u}\right)^2 + c^2a^2 \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial v}\right)^2 + a^2b^2 \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial w}\right)^2$$

$$G = (b^2 + c^2)\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial u}\right)^2 + (c^2 + a^2)\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial v}\right)^2 + (a^2 + b^2)\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial w}\right)^2$$

то приходим к следующему дифференциальному уравнению, которому должно удовлетворять ϑ:

$$1 - G + HF = 0. \tag{9}$$

Но один интеграл этого дифференциального уравнения мы знаем. Обозначим через λ параметр некоторой волновой поверхности, т. е. ту функцию от u, v, w, которая определяется уравнением (2а), если в нем заменить x, y, z через u, v, w, тогда λ удовлетворяет дифференциальному уравнению (9) (см. Ламе; Lamé, *Leçons sur l'élasticité*, p. 301), т. е. интегралы, дающие значения ξ, η, ζ, должны быть распространены на все точки пространства, ограниченного волновой поверхностью с параметром $\lambda = t$.

Результат этот, впрочем, легко было предвидеть вследствие физического смысла поверхности волны.

В статье Вейерштрасса относительно поверхности $\vartheta(u, v, w) = t$ предполагается, что она обладает тем свойством, что каждая выходящая из нулевой точки прямая пересекает ее только один раз. Для поверхности волны это условие, очевидно, не выполняется, так как каждая прямая пересекает один раз внутреннюю, другой раз внешнюю полость. Поэтому необходимо обе полости отделить друг от друга и наши интегралы распространить на те точки пространства, которое ограничено одной из них, например, внешней. Это разделение может быть достигнуто введением новых координат, которые дают нам способ представления каждой полости в отдельности.

Те координаты, которые ввел Вебер (H. Weber, Borchardt's Journal, Bd 84, S. 353 и следующие), пожалуй, являются наиболее естественными для нашей цели.

Пусть действительные постоянные a, b, c будут расположены по их абсолютному значению $a^2 > b^2 > c^2$; далее, u_1, u_2 — две новые переменные и $\operatorname{sn} u_1$, $\operatorname{cn} u_1$ $\operatorname{dn} u_1$ — эллиптические функции Якоби с модулем

$$k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}$$

наконец, $\overline{\mathrm{sn}}\, u_2$, $\overline{\mathrm{cn}}\, u_2$, $\overline{\mathrm{dn}}\, u_2$ — функции Якоби, соответствующие модулю

$$\mu^2 = \frac{a^2}{b^2} \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}$$

При сделанных предположениях для a^2, b^2, c^2, k^2 так же, как и μ^2, действительны, положительны и < 1.

Полагая тогда

$$\begin{aligned} u &= \lambda b \,\mathrm{sn}\, u_1 \,\overline{\mathrm{dn}}\, u_2 \\ v &= \lambda a \,\mathrm{cn}\, u_1 \,\overline{\mathrm{cn}}\, u_2 \\ w &= \lambda a \,\mathrm{dn}\, u_1 \,\overline{\mathrm{sn}}\, u_2 \end{aligned} \tag{10}$$

легко убедиться, что точка с координатами u, v, w принадлежит поверхности волны с параметром λ.

Полагая далее

$$K = \int_0^1 \frac{du_1}{\sqrt{(1-u_1^2)(1-k^2u_1^2)}}, \qquad L = \int_0^1 \frac{du_2}{\sqrt{(1-u_2^2)(1-\mu^2u_2^2)}}$$

получим всю внешнюю полость этой поверхности волны, и притом каждую точку ее только один раз, когда u_1 пробегает все действительные значения между $-K$ и $+K$ и u_2 все действительные значения между $-2L$ и $+2L$.

Аналогично, если положить

$$K_1 = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k_1^2 u^2)}}, \qquad L_1 = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-\mu_1^2 u^2)}}$$

$$u_1 = K - iu_1', \qquad u_2 = L - iu_2',$$

то получим все точки внутренней полости, когда u_1' пробегает все действительные значения между $-K_1$ и $+K_1$ и u_2' все действительные значения между $-2L_1$ и $+2L_1$.

Чтобы получить все точки пространства, ограниченного будь то внешней или внутренней полостью поверхности волны с параметром $\lambda = t$, необходимо, следовательно, только в вышеуказанных формулах изменять λ между 0 и определенным

значением $\lambda = t$, u_1 и u_2 между установленными выше границами.

Эти координаты действительно дают нам способ осуществить желаемое разделение обеих полостей. Но не только в этом состоит выгода их применения. Мы увидим, что с их помощью легко достигается также интегрирование обеих групп дифференциальных уравнений (8).

Для этой цели мы хотим преобразовать эти уравнения с помощью новых координат.

Если положить

$$A = \frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial \lambda}{\partial w} - \frac{\partial u_1}{\partial w}\frac{\partial \lambda}{\partial v}, \qquad A_1 = \frac{\partial u_2}{\partial v}\frac{\partial \lambda}{\partial w} - \frac{\partial u_2}{\partial w}\frac{\partial \lambda}{\partial v}$$

$$B = \frac{\partial u_1}{\partial w}\frac{\partial \lambda}{\partial u} - \frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial \lambda}{\partial w}, \qquad B_1 = \frac{\partial u_2}{\partial w}\frac{\partial \lambda}{\partial u} - \frac{\partial u_2}{\partial u}\frac{\partial \lambda}{\partial w}$$

$$C = \frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial \lambda}{\partial v} - \frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial \lambda}{\partial u}, \qquad C_1 = \frac{\partial u_2}{\partial u}\frac{\partial \lambda}{\partial v} - \frac{\partial u_2}{\partial v}\frac{\partial \lambda}{\partial u}$$

то преобразованные уравнения будут

$$\begin{aligned} A\frac{\partial \psi}{\partial u_1} + A_1\frac{\partial \psi}{\partial u_2} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial u}, & A\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + A_1\frac{\partial \varphi}{\partial u_2} &= \frac{1}{a^2}\frac{\partial \psi}{\partial u} \\ B\frac{\partial \psi}{\partial u_1} + B_1\frac{\partial \psi}{\partial u_2} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial v}, & B\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + B_1\frac{\partial \varphi}{\partial u_2} &= \frac{1}{b^2}\frac{\partial \psi}{\partial v} \qquad (11) \\ C\frac{\partial \psi}{\partial u_1} + C_1\frac{\partial \psi}{\partial u_2} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial w}, & C\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + C_1\frac{\partial \varphi}{\partial u_2} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial \psi}{\partial w} \end{aligned}$$

Но величины A, B, C, A_1, B_1, C_1, как это непосредственно видно из их определения, удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} A\frac{\partial \lambda}{\partial u} + B\frac{\partial \lambda}{\partial v} + C\frac{\partial \lambda}{\partial w} &= 0 & A_1\frac{\partial \lambda}{\partial u} + B_1\frac{\partial \lambda}{\partial v} + C_1\frac{\partial \lambda}{\partial w} &= 0 \\ A\frac{\partial u_1}{\partial u} + B\frac{\partial u_1}{\partial v} + C\frac{\partial u_1}{\partial w} &= 0 & A_1\frac{\partial u_1}{\partial u} + B_1\frac{\partial u_1}{\partial v} + C_1\frac{\partial u_1}{\partial w} &= \Delta \\ A\frac{\partial u_2}{\partial u} + B\frac{\partial u_2}{\partial v} + C\frac{\partial u_2}{\partial w} &= -\Delta, & A_1\frac{\partial u_2}{\partial u} + B_1\frac{\partial u_2}{\partial v} + C_1\frac{\partial u_2}{\partial w} &= 0 \end{aligned}$$

если обозначить через Δ функциональный определитель от u_1, u_2, λ относительно u, v, w, так что

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial u} & \frac{\partial u_1}{\partial v} & \frac{\partial u_1}{\partial w} \\ \frac{\partial u_2}{\partial u} & \frac{\partial u_2}{\partial v} & \frac{\partial u_2}{\partial w} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial u} & \frac{\partial \lambda}{\partial v} & \frac{\partial \lambda}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Так как теперь

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial u}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial v}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial w} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial w} + \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial w} + \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial w}$$

то имеем

$$A\frac{\partial \varphi}{\partial u} + B\frac{\partial \varphi}{\partial v} + C\frac{\partial \varphi}{\partial w} = -\Delta\frac{\partial \varphi}{\partial u_2}, \quad A_1\frac{\partial \varphi}{\partial u} + B_1\frac{\partial \varphi}{\partial v} + C_1\frac{\partial \varphi}{\partial w} = \Delta\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}$$

Из уравнений (11) получаются, следовательно, если каждое соответственно умножить на A, B, C или на A_1, B_1, C_1 и сложить, следующие уравнения:

(12)

$$(A^2 + B^2 + C^2)\frac{\partial \psi}{\partial u_1} + (AA_1 + BB_1 + CC_1)\frac{\partial \psi}{\partial u_2} = \Delta\frac{\partial \varphi}{\partial u_2}$$

$$(AA_1 + BB_1 + CC_1)\frac{\partial \psi}{\partial u_1} + (A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)\frac{\partial \psi}{\partial u_2} = -\Delta\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}$$

$$(a^2A^2 + b^2B^2 + c^2C^2)\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + (a^2AA_1 + b^2BB_1 + c^2CC_1)\frac{\partial \varphi}{\partial u_2} = -\Delta\frac{\partial \psi}{\partial u_2}$$

$$(a^2AA_1 + b^2BB_1 + c^2CC_1)\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + (a^2A_1^2 + b^2B_1^2 + c^2C_1^2)\frac{\partial \varphi}{\partial u_2} = \Delta\frac{\partial \psi}{\partial u_1}$$

Но если мы вычислим по известным формулам преобразования координат коэффициенты при производных от φ и ψ в этих уравнениях, то, введя обозначения

$$V = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u_1 - \mu^2 \operatorname{sn}^2 u_2 - (1 - k^2 - \mu^2) \operatorname{sn}^2 u_1 \operatorname{sn}^2 u_2$$

$$U_1 = 1 - \frac{1 - k^4 - \mu^2}{1 - k^2} \operatorname{sn}^2 u_1 - \mu^2 \operatorname{sn}^2 u_2 + \frac{k^2(1 - k^2 - \mu^2)}{1 - k^2} \operatorname{sn}^4 u_1$$

$$U_2 = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u_1 - \frac{1 - k^2 - \mu^4}{1 - \mu^2} \operatorname{sn}^2 u_2 + \frac{\mu^2(1 - k^2 - \mu^2)}{1 - \mu^2} \operatorname{sn}^4 u_2$$

найдем

$$\Delta = -\frac{1}{a^2 b} \frac{1}{\lambda^2 V}$$

$$A^2 + B^2 + C^2 = \frac{1}{a^2 b^2} \frac{1}{\lambda^2 V}$$

$$a^2 A^2 + b^2 B^2 + c^2 C^2 = \frac{c^2}{a^2 b^2} \frac{U_2}{\lambda^2 V^2}$$

$$a^2 A_1^2 + b^2 B_1^2 + c^2 C_1^2 = \frac{1}{a^2} \frac{1}{\lambda^2 V}$$

$$A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 = \frac{1}{a^4} \frac{U_1}{\lambda^2 V^2}$$

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = a^2 AA_1 + b^2 BB_1 + c^2 CC_1 = 0$$

Если эти значения подставить в уравнения (12), то два из них будут тождественно равны друг другу и они сводятся к трем следующим:

$$\frac{\partial\psi}{\partial u_1} = -b \frac{\partial\varphi}{\partial u_2}$$

$$\frac{U_1}{V} \frac{\partial\psi}{\partial u_2} = \frac{a^2}{b} \frac{\partial\varphi}{\partial u_1} \tag{13}$$

$$\frac{V}{U_2} \frac{\partial\psi}{\partial u_2} = \frac{c^2}{b} \frac{\partial\varphi}{\partial u_1}$$

Эти последние уравнения могут быть решены только, если положить

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u_1} = \frac{\partial\psi}{\partial u_2} = 0, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial u_2} = -\frac{1}{b}\frac{\partial\psi}{\partial u_1}$$

так как $U_1 U_2 - \frac{a^2}{c^2} V^2$ не равно тождественно нулю.

Общие интегралы этих уравнений будут

$$\varphi = lu_2 + m$$
$$\psi = -blu_1 + n$$

если через l, m, n обозначить три произвольные постоянные. Для нашей цели достаточно знать один частный интеграл тих уравнений. Следовательно, можно положить

$$l = 1, \qquad m = n = 0$$

Если мы это значение для φ подставим в выражения ξ, η, ζ, то получим следующий результат.

Пусть u_2 — функция u, v, w, определяемая уравнениями (10); $f(x+u, y+v, z+w)$ — произвольная функция от $x+u$, $y+v$, $z+w$; $d\omega$ — элемент объема. Обозначим через

$$\int\limits_{(t)} \varphi(u, v, w)\, d\omega$$

интеграл, который распространяется на все точки пространства, ограниченного будь то внешней или внутренней полостью поверхности волны с параметром $\lambda = t$.

Выражения

$$\begin{aligned} \xi &= D_t \int\limits_{(t)} \frac{\partial u_2}{\partial u} f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega \\ \eta &= D_t \int\limits_{(t)} \frac{\partial u_2}{\partial v} f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega \qquad (14) \\ \xi &= D_t \int\limits_{(t)} \frac{\partial u_2}{\partial w} f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega \end{aligned}$$

представляют систему интегралов дифференциальных уравнений в частных производных *во всех тех случаях*, где можно брать частные производные по x, y, z под знаком интеграла. Последнее нужно еще исследовать.

Три функции

$$\frac{\partial u_2}{\partial u}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial v}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial w}$$

имеют следующие значения:

$$\frac{\partial u_2}{\partial u} = -\frac{1}{b}\,\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}\,\frac{1}{\lambda}\,\frac{\operatorname{sn} u_1 \overline{\operatorname{sn}}\, u_2 \overline{\operatorname{cn}}\, u_2}{V}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial v} = -\frac{1}{a}\,\frac{1}{\lambda}\,\frac{\operatorname{cn} u_1 \overline{\operatorname{sn}}\, u_2 \overline{\operatorname{dn}}\, u_2}{V}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial w} = +\frac{1}{a}\,\frac{1}{\lambda}\,\frac{\operatorname{dn} u_1 \overline{\operatorname{cn}}\, u_2 \overline{\operatorname{dn}}\, u_2}{V}$$

где

$$V = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u_1 - \mu^2 \overline{\operatorname{sn}}^2 u_2 - (1 - k^2 - \mu^2) \operatorname{sn}^2 u_1 \overline{\operatorname{sn}}^2 u_2$$

Они имеют определенное конечное значение для всех значений u_1 и u_2, для которых V не равно нулю. Можно убедиться, что для значений u_1 и u_2 внутри определенных нами границ это выражение только тогда равно нулю, когда одновременно

$$\operatorname{cn} u_1 = 0, \qquad \overline{\operatorname{cn}}\, u_2 = 0$$

Соответствующие значения u, v, w тогда являются координатами одной из четырех особых точек рассматриваемой волновой поверхности. Следовательно, внутри пределов интегрирования V равно нулю для всех точек оптической оси; но легко убедиться, что интегралы (14) тем не менее сохраняют определенное конечное значение, так как если эти интегралы преобразовать к новым координатам λ, u_1, u_2, элемент объема $d\omega$ примет вид

$$a^2 b \lambda^2 V d\lambda\, du_1\, du_2$$

и, следовательно,

$$\xi = -a^2 D_t \int_0^t \int_{-K}^{K} \int_{-2L}^{2L} \frac{b^2-c^2}{a^2-c^2} \lambda \operatorname{sn} u_1 \overline{\operatorname{sn}}\, u_2 \overline{\operatorname{cn}}\, u_2 \times$$
$$\times f(x+u,\ y+v,\ z+w)\, d\lambda\, du_1 du_2$$

$$\eta = -ab D_t \int_0^t \int_{-K}^{K} \int_{-2L}^{2L} \lambda \operatorname{cn} u_1 \overline{\operatorname{sn}}\, u_2 \overline{\operatorname{dn}}\, u_2 \times$$
$$\times f(x+u,\ y+v,\ z+w)\, d\lambda\, du_1 du_2$$

$$\zeta = ab D_t \int_0^t \int_{-K}^{K} \int_{-2L}^{2L} \lambda \operatorname{dn} u_1 \overline{\operatorname{cn}}\, u_2 \overline{\operatorname{dn}}\, u_2 \times$$
$$\times f(x+u,\ y+v,\ z+w)\, d\lambda\, du_1 du_2$$

Очевидно, недопустимо непосредственно дифференцировать ξ, η, ζ по x, y, z под знаком интеграла, так как выражения, к которым мы таким образом придем, также после преобразования к новым координатам становятся бесконечными внутри пределов интегрирования. Но по методу, предложенному мне господином Вейерштрассом, можно убедиться, что та особая комбинация производных, которая встречается в дифференциальных уравнениях (1), может быть образована дифференцированием под знаком интеграла, если только произвольная функция $f(x+u,\ y+v,\ z+w)$ подчиняется следующим условиям: 1) в рассматриваемом пространстве она всюду однозначна, конечна и непрерывна; 2) ее производные по x, y, z конечны всюду в рассматриваемом пространстве. Это можно показать следующим образом.

Мысленно опишем вокруг нулевой точки небольшой шар и вокруг каждой из четырех особых точек ограничивающей поверхности волны небольшую замкнутую линию L. Затем строим четыре конуса, которые имеют нулевую точку своей вершиной и одну из четырех линий L своей направляющей. Обозначим через T первоначальный объем, а через T' — объем,

полученный из первоначального путем выделения маленького шара и четырех упомянутых конусов. В объеме T' каждая из функций

$$\frac{\partial u_2}{\partial u}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial v}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial w}$$

вместе со всеми производными имеет определенное конечное значение.

Теперь необходимо исследовать, какой вид примут формулы господина Вейерштрасса в пространстве T'. Уравнение

$$D_t \int F(u, v, w)\, d\omega = \int \frac{F(u, v, w)\, d\sigma_t}{\sqrt{\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial w}\right)^2}}$$

можно применить непосредственно. Далее уравнение

$$D_t \int D_u F(u, v, w)\, d\omega = D_t \int \frac{\frac{\partial \vartheta}{\partial u} F(u, v, w)\, d\sigma_t}{\sqrt{\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial w}\right)^2}}$$

остается в силе, если интегрирование справа распространить на всю границу объема T', т. е. 1) по внешней полости ограничивающей поверхности волны, за исключением четырех вырезанных линий L; 2) по боковым поверхностям четырех конусов, поскольку они не лежат внутри маленького шара; 3) по поверхности шара, поскольку он не лежит внутри четырех конусов. При каждом таком интегрировании выражение

$$\frac{\frac{\partial \vartheta}{\partial u}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial w}\right)^2}}$$

означает косинус угла, который внешняя нормаль образует

с осью u. Обозначая эту величину через U, имеем, следовательно,

$$\int\limits_{(T')} D_u F(u, v, w) d\omega = \int UF(u, v, w) d\sigma_t + \\ + \int U_0 F(u, v, w) d\sigma_0 + \sum \int U' F(u, v, w) d\sigma'$$

где $d\sigma_0$ — элемент поверхности шара и $d\sigma'$ — элемент поверхности одного из конусов.

Далее

$$D_t \int\limits_{(T')} D_u F(u, v, w) d\omega = D_t^2 \int \frac{\partial \vartheta}{\partial u} F(u, v, w) d\omega + \\ + D_t \sum \int U' F(u, v, w) d\sigma'$$

(так как интеграл, взятый по шару, не зависит от t).

Обозначая через x_1, y_1, z_1 координаты некоторой точки одной из выделенных линий на поверхности $\lambda = 1$, можно при последнем интегрировании в правой части вышеупомянутого уравнения положить

$$u' = tx_1, \qquad v' = ty_1, \qquad w' = tz_1$$

Тогда имеем

$$U' d\sigma' = t(y_1 dz_1 - z_1 dy_1)$$

и

$$D_t \int U' F(u', v', w') d\sigma' = t \int\limits_{(L)} F(u', v', w')(y_1 dz_1 - z_1 dy_1)$$

где интегрирование распространяется по упомянутой линии.

Если, следовательно,

$$\overline{F}(x, y, z) = D_t \int\limits_{(T')} \psi(u, v, w) f(u + x, v + y, w + z) d\omega,$$

то имеем

$$D_x\overline{F}(x, y, z) = D_t \int\limits_{(T')} \psi \frac{\partial f(u+x, v+y, w+z)}{\partial x} d\omega =$$

$$= D_t \int\limits_{(T')} D_u [\psi(u, v, w) f(u+x, v+y, w+z)] d\omega -$$

$$- D_t \int \frac{\partial\psi}{\partial u} f(x+u, y+v, z+w) d\omega =$$

$$= D_t^2 \int\limits_{(T')} \frac{\partial\lambda}{\partial u} \psi(u, v, w) f(u+x, v+y, w+z) d\omega -$$

$$- D_t \int\limits_{(T')} f(u+x, v+y, w+z) \frac{\partial\psi}{\partial u} d\omega +$$

$$+ t \int\limits_{(L)} f(u+x, v+y, w+z) \psi(u, v, w)(y_1 dz_1 - z_1 dy_1)$$

Образуем по этой формуле выражения $D_z\eta - D_y\zeta$ и т. д. (в объеме T'), тогда найдем

$$D_z\eta - D_y\zeta = D_t^2 \int\limits_{(T')} \left(\frac{\partial u_2}{\partial v} \frac{\partial\lambda}{\partial w} - \frac{\partial u_2}{\partial w} \frac{\partial\lambda}{\partial v}\right) \times$$

$$\times f(u+x, v+y, w+z) d\omega +$$

$$+ t \sum \int\limits_{(L)} f(u+x, v+y, w+z) \left\{ \frac{\partial u_2}{\partial v} (x_1 dy_1 - y_1 dx_1) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial u_2}{\partial w} (z_1 dx_1 - x_1 dz_1) \right\} \qquad (15)$$

Но необходимо заметить, что u_2 однородная функция нулевого порядка относительно u, v, w; поэтому

$$\frac{\partial u_2}{\partial u}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial v}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial w}$$

однородные функции минус первого порядка.

Следовательно,

$$\frac{\partial u_2}{\partial v} = t^{-1}\frac{\partial u_2}{\partial y_1}, \qquad \frac{\partial u_2}{\partial w} = t^{-1}\frac{\partial u_2}{\partial z_1}$$

$$t\left\{\frac{\partial u_2}{\partial v}(x_1\,dy_1 - y_1\,dx_1) - \frac{\partial u_2}{\partial w}(z_1\,dx_1 - x_1\,dz_1)\right\} =$$

$$= \frac{\partial u_2}{\partial y_1}(x_1\,dy_1 - y_1\,dx_1) - \frac{\partial u_2}{\partial z_1}(z_1\,dx_1 - x_1\,dz_1) =$$

$$= x_1\left(\frac{\partial u_2}{\partial y_1}\,dy_1 + \frac{\partial u_2}{\partial z_1}\,dz_1\right) - \left(y_1\frac{\partial u_2}{\partial y_1} + z_1\frac{\partial u_2}{\partial z_1}\right)dx_1$$

Но так как u_2 однородная функция нулевого порядка, то

$$x_1\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + y_1\frac{\partial u_2}{\partial y_1} + z_1\frac{\partial u_2}{\partial z_1} = 0$$

и вышеупомянутое выражение равно

$$x_1\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial u_2}{\partial y_1}\,dy_1 + \frac{\partial u_2}{\partial z_1}\,dz_1\right) = x_1\,du_2$$

Следовательно,

$$D_z\eta - D_y\zeta = D_t\int\limits_{(T')}\left(\frac{\partial u_2}{\partial v}\frac{\partial\lambda}{\partial w} - \frac{\partial u_2}{\partial w}\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right)\times$$
$$\times f(x+u,\ y+v,\ z+w)\,d\omega +$$
$$+\sum\int\limits_{(L)} x_1 f(u+x,\ v+y,\ w+z)\,du_2 \qquad (15a)$$

Но теперь

$$\int\limits_{(L)} x_1 f(x+u,\ y+v,\ z+w)\,du_2 =$$
$$= \int\limits_{(L)} d\{x_1 f(x+u,\ y+v,\ z+w)\,u_2\} -$$
$$- \int\limits_{(L)} u_2\,d\{x_1 f(x+u,\ y+v,\ z+w)\}$$

Так как линия L замкнутая и так как на части поверхности, ею ограниченной, $x_1 f(x+u, y+v, z+w)$, а также $u_2 x_1 f(x+u, y+v, z+w)$ остаются всюду конечными и непрерывными, то один из двух интегралов, стоящих в правой части этого уравнения, равен нулю.

Второй интеграл при постепенном уменьшении линии L даст также сколь угодно малое число.

Но далее

$$\frac{\partial u_2}{\partial v}\frac{\partial \lambda}{\partial w}-\frac{\partial u_2}{\partial w}\frac{\partial \lambda}{\partial v}=-\frac{b}{a^2}\frac{\partial u_1}{\partial u}$$

и выражение

$$\frac{\partial u_1}{\partial u}\,d\omega$$

конечно и определено в *каждой* точке поверхности волны. Следовательно, правая часть уравнения (15a) сохраняет определенное конечное значение, как бы мала ни была линия L.

При $\lim L=0$ каждый из криволинейных интегралов становится бесконечно малым, и мы получим

$$\xi_1=a^2(D_y\zeta-D_z\eta)=-\frac{1}{b}\int\limits_{(T)}\frac{\partial u_1}{\partial u}f(u+x, v+y, w+z)\,d\omega \quad (15b)$$

Но теперь u_1 есть функция, обладающая тем же свойством, что и u_2; то же рассуждение может быть перенесено на эти новые интегралы и точно таким же образом можно убедиться, что выражения

$$D_y\zeta_1-D_z\eta_1 \text{ и т. д.}$$

могут быть образованы, если продифференцировать под знаком интеграла и затем применить формулы преобразования Вейерштрасса.

Мы пришли, таким образом, к следующему результату. Определим три величины λ, u_1, u_2 как функции прямоуголь-

ных координат некоторой точки в пространстве, так что

$$u = b\lambda \operatorname{sn} u_1 \overline{\operatorname{dn}}\, u_2$$
$$v = a\lambda \operatorname{cn} u_1 \overline{\operatorname{cn}}\, u_2 \qquad (16)$$
$$w = a\lambda \operatorname{dn} u_1 \overline{\operatorname{sn}}\, u_2$$

Тогда имеем

$$\frac{\partial u_2}{\partial u} = -\frac{1-k^2}{b\lambda}\,\frac{\operatorname{sn} u_1 \overline{\operatorname{sn}}\, u_2 \overline{\operatorname{cn}}\, u_2}{V}$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial v} = -\frac{1}{a\lambda}\,\frac{\operatorname{cn} u_1 \overline{\operatorname{sn}}\, u_2 \overline{\operatorname{dn}}\, u_2}{V} \qquad (16a)$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial w} = +\frac{1}{a\lambda}\,\frac{\operatorname{dn} u_1 \overline{\operatorname{cn}}\, u_2 \overline{\operatorname{dn}}\, u_2}{V}$$

$$V = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u_1 - \mu^2 \overline{\operatorname{sn}}^2 u_2 - (1 - k^2 - \mu^2) \operatorname{sn}^2 u_1 \overline{\operatorname{sn}}^2 u_2$$

Обозначая через x, y, z три действительные величины и через $f(x+u, y+v, z+w)$ функцию, удовлетворяющую вышеприведенным условиям конечности и непрерывности, в остальном произвольную, положим

$$\xi = D_t \int \frac{\partial u_2}{\partial u} f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega$$
$$\eta = D_t \int \frac{\partial u_2}{\partial v} f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega \qquad (17)$$
$$\zeta = D_t \int \frac{\partial u_2}{\partial w} f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega$$

где интегрирование в левой части распространяется на все точки пространства, ограниченного внешней (соответственно внутренней) полостью поверхности волны с параметром $\lambda = t$; тогда таким образом определенные величины ξ, η, ζ представляют функции от x, y, z, t, которые имеют определенное конечное значение для всех конечных действительных значений этих переменных и удовлетворяют дифференциальным уравнениям в частных производных (1).

Если в уравнениях (17) выразить элемент объема $d\omega$ в координатах λ, u_1, u_2 и для

$$\frac{\partial u_2}{\partial u}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial v}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial w}$$

подставить их значения из уравнений (16а), то получим величины ξ, η, ζ в следующем виде:

$$\xi = t\int\limits_{-K}^{K}\int\limits_{-2L}^{2L}\frac{1-k^2}{b}\,\mathrm{sn}\,u_1\,\overline{\mathrm{sn}}\,u_2\,\overline{\mathrm{cn}}\,u_2\,f(x+u,\,y+v,\,z+w)\,du_1du_2$$

$$\eta = t\int\limits_{-K}^{K}\int\limits_{-2L}^{2L}-\frac{1}{a}\,\mathrm{cn}\,u_1\,\overline{\mathrm{sn}}\,u_2\,\overline{\mathrm{dn}}\,u_2\,f(x+u,\,y+v,\,z+w)\,du_1du_2$$

$$\zeta = t\int\limits_{-K}^{K}\int\limits_{-2L}^{2L}\frac{1}{a}\,\mathrm{dn}\,u_1\,\overline{\mathrm{cn}}\,u_2\,\overline{\mathrm{dn}}\,u_2\,f(x+u,\,y+v,\,z+w)\,du_1du_2$$

В эти формулы нужно для встречающихся в функциях $f(x+u,\ y+v,\ z+w)$ величин u, v, w подставить их значения из уравнений (16).

Теперь речь идет о том, чтобы установить начальные значения для таким образом определенных величин ξ, η, ζ, т. е. их значения для $t=0$.

Для этой цели я эти величины ξ, η, ζ представлю в другом виде. Имеем

$$-\frac{1}{b}\frac{\partial u_2}{\partial u} = \frac{\partial u_1}{\partial w}\frac{\partial\lambda}{\partial v} - \frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial\lambda}{\partial w}$$

$$-\frac{1}{b}\frac{\partial u_2}{\partial v} = \frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial\lambda}{\partial w} - \frac{\partial u_1}{\partial w}\frac{\partial\lambda}{\partial u}$$

$$-\frac{1}{b}\frac{\partial u_2}{\partial w} = \frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial\lambda}{\partial u} - \frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial\lambda}{\partial v}$$

Используя формулы преобразования (B), которые можно также записать в виде

$$D_t \int\limits_t \varphi(u, v, w) \frac{\partial \lambda}{\partial u} f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega =$$

$$= \int \varphi(u, v, w) \frac{\partial f(x+u, y+v, z+w)}{\partial x} d\omega +$$

$$+ \int \frac{\partial \varphi}{\partial u} f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega,$$

мы получим (18)

$$\xi = D_t \int \frac{\partial u_2}{\partial u} f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega =$$

$$= -bD_t \int \left(\frac{\partial u_1}{\partial w} \frac{\partial \lambda}{\partial v} - \frac{\partial u_1}{\partial v} \frac{\partial \lambda}{\partial w} \right) f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega =$$

$$= -b \int \left[\frac{\partial u_1}{\partial w} \frac{\partial f(x+u, y+v, z+w)}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial v} \frac{\partial f(x+u, y+v, z+w)}{\partial z} \right] d\omega$$

$$\eta = D_t \int \frac{\partial u_2}{\partial v} f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega =$$

$$= -bD_t \int \left(\frac{\partial u_1}{\partial u} \frac{\partial \lambda}{\partial w} - \frac{\partial u_1}{\partial w} \frac{\partial \lambda}{\partial u} \right) f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega =$$

$$= -b \int \left[\frac{\partial u_1}{\partial u} \frac{\partial f(x+u, y+v, z+w)}{\partial z} - \frac{\partial u_1}{\partial w} \frac{\partial f(x+u, y+v, z+w)}{\partial x} \right] d\omega$$

$$\zeta = D_t \int \frac{\partial u_2}{\partial w} f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega =$$

$$= -bD_t \int \left(\frac{\partial u_1}{\partial v} \frac{\partial \lambda}{\partial u} - \frac{\partial u_1}{\partial u} \frac{\partial \lambda}{\partial v} \right) f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega =$$

$$= -b \int \left[\frac{\partial u_1}{\partial v} \frac{\partial f(x+u, y+v, z+w)}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial u} \frac{\partial f(x+u, y+v, z+w)}{\partial y} \right] d\omega$$

Чтобы получить также и в этом случае вместо трехкратных интегралов двукратные, возьмем вместо ξ, η, ζ производные этих новых выражений по t, которые, естественно, также образуют систему решений. Полагаем таким образом

$$\xi = -\frac{1}{b} D_t^2 \int \frac{\partial u_2}{\partial u} f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega =$$
$$= D_t \int \left[\frac{\partial u_1}{\partial w} \frac{\partial f(x+u, \ldots)}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial v} \frac{\partial f(x+u, \ldots)}{\partial z} \right] d\omega$$

$$\eta = -\frac{1}{b} D_t^2 \int \frac{\partial u_2}{\partial v} f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega = \tag{19}$$
$$= D_t \int \left[\frac{\partial u_1}{\partial u} \frac{\partial f(x+u, \ldots)}{\partial z} - \frac{\partial u_1}{\partial w} \frac{\partial f(x+u, \ldots)}{\partial x} \right] d\omega$$

$$\zeta = -\frac{1}{b} D_t^2 \int \frac{\partial u_2}{\partial w} f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega =$$
$$= D_t \int \left[\frac{\partial u_1}{\partial v} \frac{\partial f(x+u, \ldots)}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial u} \frac{\partial f(x+u, \ldots)}{\partial y} \right] d\omega$$

Из уравнений (16) для

$$\frac{\partial u_1}{\partial u}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial v}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial w}$$

получаются следующие значения:

$$\frac{\partial u_1}{\partial u} = \frac{1}{b\lambda} \frac{\operatorname{cn} u_1 \operatorname{dn} u_1 \overline{\operatorname{dn}}\, u_2}{V} = \frac{V_1}{V}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial v} = -\frac{1}{a\lambda} \frac{\operatorname{sn} u_1 \operatorname{dn} u_1 \overline{\operatorname{cn}}\, u_2}{V} = \frac{V_2}{V}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial w} = -\frac{1-\mu^2}{a\lambda} \frac{\operatorname{sn} u_1 \operatorname{cn} u_1 \overline{\operatorname{sn}}\, u_2}{V} = \frac{V_3}{V}$$

Выражая в интегралах в правой части уравнений (19) элемент объема $d\omega$ в новых координатах и распространяя

интегрирование на все точки *внешней* поверхности волны, находим таким образом

$$\xi = t \int_{-K}^{K} \int_{-2L}^{2L} \left[V_3 \frac{\partial f(x+u, y+v, z+w)}{\partial y} - \right.$$
$$\left. - V_2 \frac{\partial f(x+u, y+v, z+w)}{\partial z} \right] du_1 du_2$$

$$\eta = t \int_{-K}^{K} \int_{-2L}^{2L} \left[V_1 \frac{\partial f(x+u, y+v, z+w)}{\partial z} - \right. \qquad (20)$$
$$\left. - V_3 \frac{\partial f(x+u, y+v, z+w)}{\partial x} \right] du_1 du_2$$

$$\zeta = t \int_{-K}^{K} \int_{-2L}^{2L} \left[V_2 \frac{\partial f(x+u, y+v, z+w)}{\partial x} - \right.$$
$$\left. - V_1 \frac{\partial f(x+u, y+v, z+w)}{\partial y} \right] du_1 du_2$$

В эти формулы нужно подставить для u, v, w их значения из уравнений (16).

Легко убедиться (из рассуждений, подобных встречающимся в статье Вейерштрасса), что представленные этими формулами значения ξ, η, ζ — *нечетные* функции t.

Чтобы получить коэффициент при t, нужно в функции $f(x+u, y+v, z+w)$, встречающейся под знаком интеграла, положить $t=0$, следовательно, также $u=0$, $v=0$, $w=0$.

Обозначая эти коэффициенты при ξ, η, ζ соответственно через X_0, Y_0, Z_0 и полагая

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_1(x, y, z), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_2(x, y, z), \quad \frac{\partial f}{\partial z} = f_3(x, y, z)$$

имеем

$$X_0 = f_2(x, y, z) \int_{-K}^{K} \int_{-2L}^{2L} V_3 du_1 du_2 - f_3(x, y, z) \int_{-K}^{K} \int_{-2L}^{2L} V_2 du_1 du_2$$

$$Y_0 = f_3(x, y, z) \int_{-K}^{K} \int_{-2L}^{2L} V_1 du_1 du_2 - f_1(x, y, z) \int_{-K}^{K} \int_{-2L}^{2L} V_3 du_1 du_2.$$

$$Z_0 = f_1(x, y, z) \int_{-K}^{K} \int_{-2L}^{2L} V_2 du_1 du_2 - f_2(x, y, z) \int_{-K}^{K} \int_{-2L}^{2L} V_1 du_1 du_2$$

Но теперь

$$\int_{-K}^{K} \int_{-2L}^{2L} V_1 du_1 du_2 = \frac{1}{b} \int_{-K}^{K} \operatorname{cn} u_1 \operatorname{dn} u_1 du_1 \int_{-2L}^{2L} \overline{\operatorname{dn}}\, u_2\, du_2 = \frac{4\pi}{b}$$

$$\int_{-K}^{K} \int_{-2L}^{2L} V_2 du_1 du_2 = \int_{-K}^{K} \operatorname{sn} u_1 \operatorname{dn} u_1 du_1 \int_{-2L}^{2L} \overline{\operatorname{cn}}\, u_2\, du_2 = 0$$

$$\int_{-K}^{K} \int_{-2L}^{2L} V_3 du_1 du_2 = \int_{-K}^{K} \operatorname{sn} u_1 \operatorname{cn} u_1 du_1 \int_{-2L}^{2L} \overline{\operatorname{sn}}\, u_2\, du_2 = 0$$

Значения ξ, η, ζ, представленные формулами (20), будут интегралами дифференциальных уравнений в частных производных (1), обладающими следующими свойствами: для $t=0$ их значения равны нулю; начальные значения

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

соответственно равны

$$0, \quad \frac{4\pi}{b} \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}, \quad -\frac{4\pi}{b} \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}$$

где $f(x, y, z)$ — произвольная функция от x, y, z.

Эти значения для ξ, η, ζ получены с помощью интегрирования, распространенного на внешнюю полость поверхности

волны. Если исходить из аналогичных формул, но распространять их на *внутреннюю* полость волновой поверхности, где вместо $f(x+u, \ldots)$ входит другая произвольная функция $F(x+u, \ldots)$, то придем к значениям ξ, η, ζ, которые также являются интегралами уравнений (1) и так образованы, что для $t=0$ все они равны нулю, тогда как значения

$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)_0$$

соответственно равны

$$-\frac{4\pi}{b}\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y}, \quad \frac{4\pi}{b}\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x}, \quad 0$$

Комбинируя обе эти системы значений для ξ, η, ζ, приходим к системе интегралов рассматриваемого дифференциального уравнения, которые обладают свойством, что для

$$\xi=0, \quad \eta=0, \quad \zeta=0$$

$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)_{t=0} = -\frac{4\pi}{b}\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}$$

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)_{t=0} = \frac{4\pi}{b}\left[\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z}\right]$$

$$\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)_{t=0} = -\frac{4\pi}{b}\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y}$$

Функции ξ, η, ζ подчиняются условию, что их начальные значения удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial\xi_0}{\partial x} + \frac{\partial\eta_0}{\partial y} + \frac{\partial\zeta_0}{\partial z} = 0$$

и

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)_{t=0} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)_{t=0} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$$

Но, как известно, если $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$—некоторые три функции от x, y, z, между которыми существует соотношение

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}=0$$

то всегда можно найти две функции $f(x, y, z)$, $F(x, y, z)$ так, что

$$\varphi_1=-\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}$$

$$\varphi_2=\left(\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}+\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z}\right)$$

$$\varphi_3=-\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y}$$

Рассмотренные значения ξ, η, ζ представляют собой наиболее общие интегралы дифференциальных уравнений (1), которые *одновременно являются нечетными функциями от t.* Беря первые производные по t от этих значений для ξ, η, ζ, перейдем к системе интегралов, являющихся четными функциями от t. Комбинируя обе системы одна с другой, получим, таким образом, общую систему интегралов дифференциальных уравнений (1), подчиняющихся только условию

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}=0$$

Этим, следовательно, та задача, которую я себе поставила, полностью решена. Но теперь я сделаю еще следующее замечание.

Дифференциальные уравнения (1) были установлены Ламе в предположении, что перемещения ξ, η, ζ удовлетворяют уравнению

$$\theta=\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}=0$$

Если отбросить это предположение, то, как это показал Кирхгофф в своих лекциях по механике, придем к некоторой

системе дифференциальных уравнений, которая отличается от системы (1) только тем, что в правой части каждого уравнения соответственно прибавляется член

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}, \quad \frac{\partial\theta}{\partial y}, \quad \frac{\partial\theta}{\partial z}$$

умноженный на постоянную.

Легко также и для этой системы дифференциальных уравней установить общую систему интегралов. Действительно, пусть ξ, η, ζ есть система интегралов этой системы дифференциальных уравнений, тогда полагаем

$$\xi = \frac{\partial u}{\partial x} + \xi_1, \qquad \eta = \frac{\partial u}{\partial y} + \eta_1, \qquad \zeta = \frac{\partial u}{\partial z} + \zeta_1$$

Определим функцию u с помощью уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}$$

или, как я для сокращения буду писать:

$$\triangle u - \theta = 0 \tag{21}$$

Тогда ξ, η, ζ образуют систему интегралов уравнений (1), для которых имеет место соотношение

$$\frac{\partial\xi_1}{\partial x} + \frac{\partial\eta_1}{\partial y} + \frac{\partial\zeta_1}{\partial z} = 0$$

Эта система интегралов уравнений (1) представима, таким образом, установленными выше формулами.

Что касается функции u, то она, кроме уравнения (21), должна удовлетворять еще следующим уравнениям:

$$D^x(D_t^2 - \triangle)u = 0$$
$$D_y(D_t^2 - \triangle)u = 0$$
$$D_z(D_t^2 - \triangle)u = 0$$

Можно, однако, следующим образом удовлетворить этим уравнениям одновременно.

Определяем две функции u_0 и u_1 от x, y, z из обоих дифференциальных уравнений:

$$\triangle u_0 = (\theta)_{t=0}$$

$$\triangle u_1 = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{t=0}$$

Если для u взять такое решение дифференциального уравнения

$$(D_t^2 - \triangle) u = 0$$

которое определяется условиями

$$(u)_{t=0} = u_0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{du}{dt}\right)_{t=0} = u_1$$

то $\triangle u$ будет решением дифференциального уравнения

$$(D_t^2 - \triangle) \varphi = 0$$

причем значения $\triangle u$ и его производной по t при $t = 0$ равны $\triangle u_0$ и соответственно $\triangle u_1$. Они совпадают, таким образом, с начальными значениями для θ и $\frac{d\theta}{dt}$. Так как θ удовлетворяет такому же дифференциальному уравнению, то, следовательно, для всех значений t

$$\triangle u = \theta$$

u, таким образом, удовлетворяет требуемым условиям (1).

О РАСПРОСТРАНЕНИИ СВЕТА В КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

В своих Leçons sur l'élasticité (Лекциях по упругости) Ламе привел вопрос о распространении света в кристаллической среде к интегрированию системы трех уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(a^2\frac{\partial\eta}{\partial x} - b^2\frac{\partial\xi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(c^2\frac{\partial\xi}{\partial z} - a^2\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(b^2\frac{\partial\zeta}{\partial y} - c^2\frac{\partial\eta}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(a^2\frac{\partial\eta}{\partial x} - b^2\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(c^2\frac{\partial\xi}{\partial z} - a^2\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(b^2\frac{\partial\zeta}{\partial y} - c^2\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)$$

В этих уравнениях t представляет время, x, y, z — координаты точки колеблющейся среды, ξ, η, ζ — проекции отклонения этой точки от ее положения равновесия и a^2, b^2, c^2 — три оптические постоянные кристалла.

Ламе нашел три аналитических выражения для ξ, η, ζ, которые удовлетворяют этим уравнениям и которые, следовательно, могут представить некоторое колебательное движение, имеющее место в среде при распространении световой волны, исходящей из одного колебательного центра.

Однако эти выражения, найденные Ламе с помощью очень сложного, но в высшей степени остроумного вычисления, представляют некоторые особенности, вследствие которых определяемое ими движение физически невозможно, так как они обращаются в $\frac{0}{0}$ для каждой точки оптической оси и становятся бесконечными в самом центре колебаний.

Чтобы объяснить этот странный результат, Ламе прибег к гипотезе существования непроницаемого эфира, который окружает каждую молекулу колеблющейся материи и играет, так сказать, роль эластичной подушки. Кроме того, эта гипотеза, высказанная Ламе в качестве простой возможности, совершенно не развернута им в ее математических следствиях.

В работе, которую я закончила, я занимаюсь отысканием общих интегралов системы предложенных уравнений и я прихожу к ним с помощью метода, который господин Вейерштрасс нашел уже давно, но который до сих пор еще не был применен. Результаты, к которым я пришла, могут быть выражены следующим образом.

Если, употребляя сокращенные обозначения, введенные Ламе,

$$q = a^2b^2c^2$$

$$R = x^2 + y^2 + z^2$$

$$P = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2$$

$$Q = a^2(b^2 + c^2)x^2 + b^2(c^2 + a^2)y^2 + c^2(a^2 + b^2)z^2$$

я определю некоторое количество t с помощью уравнения

$$qt^4 - Qt^2 + RP = 0$$

то уравнение $t = \text{const}$ представит *поверхность волны*.

Эта поверхность образована двумя полостями, которые имеют только четыре общих точки между собой; я могу представить себе эти две полости отделенными друг от друга

и получаю тогда однородное пространство, ограниченное одной из этих полостей (например, внешней).

Приняв это, я нахожу три специальные функции $\varphi_1(x, y, z)$, $\varphi_2(x, y, z)$, $\varphi_3(x, y, z)$, имеющие следующее свойство: если я обозначу через $f(x, y, z)$ функцию, имеющую в каждой точке рассматриваемого пространства конечное и определенное значение, так же как и две ее первые производные, но в остальном совершенно произвольную, и если я положу

$$\xi = \iiint \varphi_1(u, v, w) f(x+u, y+v, z+w)\, du\, dv\, dw$$

$$\eta = \iiint \varphi_2(u, v, w) f(x+u, y+v, z+w)\, du\, dv\, dw$$

$$\zeta = \iiint \varphi_3(u, v, w) f(x+u, y+v, z+w)\, du\, dv\, dw$$

где тройное интегрирование распространено на все точки пространства, ограниченного полостью (внешней или внутренней) волновой поверхности, соответствущей некоторому значению t, то ξ, η, ζ будут функциями x, y, z, t, удовлетворяющими предложенной системе уравнений.

Присоединяя к этим величинам ξ, η, ζ другие, почти такой же формы, я прихожу к системе значений ξ, η, ζ, которая позволяет мне доказать: 1°, что она удовлетворяет предложенной системе уравнений; 2°, что при $t = 0$ все эти величины ξ, η, ζ, так же как их первые производные по t, становятся равными заданным функциям от x, y, z, которые должны быть выбраны, однако, в согласии с уравнением

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z} = 0$$

С помощью этих общих формул получаем некоторое физически возможное движение, не прибегая к гипотезе эфира.



ДОПОЛНЕНИЯ И ЗАМЕЧАНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ ЛАПЛАСА О ФОРМЕ КОЛЬЦА САТУРНА

По моей просьбе автор позволила мне передать нижеследующую рукопись редакции Астрономических известий. Статья составлена уже много лет тому назад, но до сих пор еще не была напечатана, и я думаю, что опубликование этого в высшей степени интересного исследования может быть для читателей Астрономических известий только приятным.

Гюго Гюльден

Лаплас в главе „Небесной механики", которая занимается формой небесных тел, предпринял также теоретическое определение формы кольца Сатурна. Основу его исследования составляет следующая задача.

Заполненное однородной массой кольцо, происходящее от вращения эллипса вокруг прямой, не пересекающей его, но лежащей в его плоскости и параллельной одной из его главных осей, вращается с равномерной скоростью вокруг этой прямой (оси кольца). Поверхность кольца покрыта бесконечно тонким слоем однородной жидкости, которая притягивается кольцом и, кроме того, центральным телом, центр тяжести которого совпадает с центром кольца. Спрашивается, могут ли быть определены элементы кольца (полуоси производящего эллипса и расстояние от центра эллипса до оси вращения) и его скорость вращения так, чтобы жидкость

сохраняла положение равновесия (относительно поверхности кольца), для чего, как известно, необходимо и достаточно, чтобы следующее уравнение имело место:

$$V + \frac{M}{\sqrt{\rho_1^2 + z_1^2}} + \frac{1}{2} n^2 \rho_1^2 - C = 0 \qquad (1)$$

где n — угловая скорость вращения кольца;

V — потенциал кольца в некоторой точке его поверхности;

ρ_1 — расстояние этой точки до оси вращения;

z_1 — ее расстояние до экваториальной плоскости;

M — масса центрального тела, которая принимается сосредоточенной в его центре тяжести;

C — постоянная.

Но Лаплас исследовал эту задачу только в предположении, что отверстие кольца (т. е. расстояние его центра до центра производящего эллипса) очень велико по сравнению с полуосями последнего. Так как при этом предположении частица поверхности кольца испытывает лишь очень слабое притяжение со стороны отдаленных частей его, то при вычислении V Лаплас заменяет действующую часть кольца бесконечным эллиптическим цилиндром и приходит, таким образом, к следующему результату.

Если принять отношение большой оси эллипса, производящего кольцо, к расстоянию от центра кольца до оси вращения за малую величину первого порядка, то возможно при заданной массе центрального тела определить скорость вращения и отношение обеих осей эллипса таким образом, чтобы удовлетворить предыдущему уравнению приближенно, а именно, до малой величины третьего порядка (исключительно). Но предположение Лапласа, что при определении V кольцо может быть заменено цилиндром, неудовлетворительно, так как нельзя непосредственно судить о том, будет ли допущенная при этом ошибка в действительности заданного порядка.

Кроме того, лапласовская трактовка задачи не позволяет узнать, можно ли и как небольшим изменением эллиптического сечения кольца достичь того, чтобы выражение в левой части уравнения (1) или в действительности было равно нулю, или произвольно близко приближалось к этой границе.

На этом основании я попробовала рассмотреть задачу, о которой идет речь, другим способом. Я принимаю, что линия, ограничивающая фигуру, производящую кольцо, которую я в дальнейшем буду обозначать через L, мало отличается от эллипса и подобно ему обладает осью симметрии, пересекающей при своем продолжении ось кольца под прямым углом, причем каждая прямая, параллельная оси симметрии, пересекает эту линию только в двух точках. Если я выберу такую прямоугольную систему координат, ось Z которой является осью вращения кольца, в то время как плоскость XY проходит через вышеуказанную ось симметрии, то, принимая за единицу длины среднее между ее наименьшим и наибольшим расстоянием до оси Z, я могу представить поверхность кольца двумя уравнениями вида

$$\sqrt{x^2+y^2}=1-a\cos t \qquad (2)$$
$$z=a(\beta\sin t+\beta_1\sin 2t+\beta_2\sin 3t+\ldots)$$

где t — действительное переменное, которое пробегает все значения от 0 до 2π, а a, β, β_1, β_2, $\beta_3, \ldots$ — постоянные.

Сохраняя лапласовское допущение, что каждая хорда очень мала по сравнению со средним расстоянием этой линии до оси Z, необходимо в этих формулах считать a очень малой дробью; чтобы L мало отличалось от эллипса, не только все β_1, $\beta_2, \ldots$ должны быть малыми величинами, но также сумма их абсолютных значений должна быть малой по сравнению с β.

При этих предположениях пусть будет $d\sigma$ — бесконечно малый элемент поверхности кольца, P — точка элемента,

P_1—определенная точка поверхности, для которой вычисляется потенциал V, θ — угол, который образует внешняя нормаль к поверхности в точке P с прямой PP_1; тогда имеем по Гауссу (Gauss, Gesammelte Werke, Bd V, Handschriftliche Bemerkung zu der Abhandlung „Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum", стр. 286)

$$V = -\frac{1}{2}\iint \cos\theta \, d\sigma \tag{3}$$

Пусть будут x, y, z координаты точки P, x_1, y_1, z_1 — координаты P_1, r — расстояние между этими двумя точками и ξ, η, ζ — косинусы угла, который вышеуказанная нормаль образует с положительными направлениями координатных осей. Имеем

$$\cos\theta = \frac{x_1 - x}{r}\,\xi + \frac{y_1 - y}{r}\,\eta + \frac{z_1 - z}{r}\,\zeta \tag{4}$$

Полагая далее

$$x = \sqrt{x^2 + y^2}\cos\psi, \qquad y = \sqrt{x^2 + y^2}\sin\psi$$

имеем

$$\begin{aligned} x &= (1 - a\cos t)\cos\psi \\ y &= (1 - a\cos t)\sin\psi \\ z &= a\varphi(t) = a(\beta\sin t + \beta_1\sin 2t + \ldots) \end{aligned} \tag{5}$$

и

$$\begin{aligned} x_1 &= (1 - a\cos t_1)\cos\psi_1 \\ y_1 &= (1 - a\cos t_1)\sin\psi_1 \\ z_1 &= a\varphi(t_1) \end{aligned} \tag{6}$$

Полагая для сокращения

$$\begin{aligned} A &= 4(1 - a\cos t)(1 - a\cos t_1) \\ B &= a^2[(\cos t - \cos t_1)^2 + [\varphi(t) - \varphi(t_1)]^2] \\ C &= 2a^2(1 - a\cos t)[(\cos t - \cos t_1)\varphi'(t) + \sin t[\varphi(t) - \varphi(t_1)]] \end{aligned} \tag{7}$$

будем иметь

$$V = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} dt \int_0^{2\pi} \frac{C - Aa\varphi'(t)\sin^2 1/2(\psi - \psi_1)}{\sqrt{B + A\sin^2 1/2(\psi - \psi_1)}} d\psi$$

или, полагая

$$\vartheta = \frac{1}{2}(\psi - \psi_1), \qquad W = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{C - Aa\,\varphi'(t)\sin^2\vartheta}{\sqrt{B + A\sin^2\vartheta}} d\vartheta \tag{8}$$

получим

$$V = \int_0^{2\pi} W dt \tag{9}$$

Я преобразую интеграл W, полагая

$$\sqrt{A\sin^2\vartheta + B} = \sqrt{B}\,s$$

откуда получается

$$W = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{C + Ba\,\varphi'(t) - Ba\,\varphi'(t)s^2}{\sqrt{A+B}\sqrt{s^2-1}\sqrt{1-k^2s^2}} ds$$

где

$$k^2 = \frac{B}{A+B} \tag{10}$$

Так как k^2, по предположению, очень малая величина, то для подсчета W лучше всего воспользоваться известными формулами Вейерштрасса (Weierstrass, „Theorie der Abelschen Functionen", Crelles Journal, Bd 52, S. 75 und 80):

$$\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2-1}\sqrt{1-k^2\xi^2}} = \frac{1}{2}K\log\frac{16}{k^2} - \overline{K}$$

$$\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{k^2\xi^2\,d\xi}{\sqrt{\xi^2-1}\sqrt{1-k^2\xi^2}} = \frac{1}{2}F\log\frac{16}{k^2} - \overline{F}$$

где

$$K = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \ldots$$

$$\overline{K} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \frac{7}{2.3}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \ldots$$

$$F = \frac{1}{2} k^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^4 + \ldots$$

$$\overline{F} = -1 + \frac{1}{4} k^2 + \frac{13}{12}\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^4 + \ldots$$

Тогда имеем

$$W = W_1 \log \frac{16}{k^2} + W_2$$

где

$$W_1 = \frac{1}{2}\frac{C + aB\varphi'(t)}{\sqrt{A+B}} K - \frac{1}{2}\frac{aB\varphi'(t)}{\sqrt{A+B}} F$$

$$W_2 = -\frac{C + aB\varphi'(t)}{\sqrt{A+B}} \overline{K} + \frac{aB\varphi'(t)}{\sqrt{A+B}} \overline{F}$$

Величины W_1, W_2 можно разложить в ряд по синусам и косинусам t, t_1 и притом так, что коэффициенты будут степенными рядами величин a, β, $\beta_1, \ldots$ Ряды эти ввиду малости a очень быстро сходятся.

Интеграл

$$\int_0^{2\pi} W_2 dt$$

непосредственно определяется умножением на 2π члена ряда для W_2, не зависящего от t.

Не так просто обстоит дело с интегралом

$$\int_0^{2\pi} W_1 \log \frac{16}{k^2} dt$$

Величина $B = a^2[(\cos t - \cos t_1)^2 + [\varphi(t) - \varphi(t_1)]^2]$, рассматриваемая как функция t, будет равна нулю только тогда, когда одновременно $\cos t = \cos t_1$ и $\varphi(t) = \varphi(t_1)$, что при принятой форме для линии L произойдет только тогда, когда $t = t_1 + 2m\pi$, где m — целое число; отсюда следует, что B делится на $1 - \cos(t - t_1)$. Следовательно, можно положить

$$B = a^2[1 - \cos(t - t_1)]B_1$$

где B_1 разлагается по синусам и косинусам t, t_1.

Полагая все β_1, $\beta_2, \ldots$ равными нулю, приводим B_1 к виду

$$\frac{1}{2}(1 + \beta^2) - \frac{1}{2}(1 - \beta^2)\cos(t + t_1)$$

откуда следует, что B_1 при достаточной малости величин β_1, $\beta_2, \ldots$ для действительных значений t, t_1 не равно нулю.

Коэффициенты отдельных членов B_1 будут снова целые функции от a, β, $\beta_1, \ldots$

Полагая теперь

$$B_1 = \left[\frac{1}{2}(1 + \beta^2) - \frac{1}{2}(1 - \beta^2)\cos(t + t_1)\right](1 + B_2)$$

имеем

$$\log B = 2\log a + \log[1 - \cos(t - t_1)] +$$
$$+ \log\left[\frac{1}{2}(1 + \beta^2) - \frac{1}{2}(1 - \beta^2)\cos(t + t_1)\right] + \log(1 + B_2)$$

Величина $W_1 \log\frac{16}{k^2}$ составляется из следующих пяти частей:

$$W_1 \log 16(A + B)$$

$$-2W_1 \log a$$

$$-W_1 \log\left[\frac{1}{2}(1 + \beta^2) - \frac{1}{2}(1 - \beta^2)\cos(t + t_1)\right]$$

$$-W_1 \log[1 - \cos(t - t_1)]$$

$$-W_1 \log(1 + B_2)$$

Первые три части можно разложить в ряды той же формы, как и для W_2, и тогда непосредственно определить соответствующие им части интеграла

$$\int_0^{2\pi} W_1 \log \frac{16}{k^2}\, dt$$

Четвертую часть можно разложить в ряд заданной формы только для значений $t - t_1$, лежащих между $0 \ldots 2\pi$; тогда по теореме Фурье член, не зависящий от t, умноженный на 2π, дает значение интеграла

$$-\int_0^{2\pi} W_1 \log [1 - \cos (t - t_1)]\, dt$$

Для вычисления интеграла

$$\int_0^{2\pi} W_1 \log (1 + B_2)\, dt$$

нужно сначала разложить $\log (1 + B_2)$ в ряд по степеням B_2, который вследствие принятой малости суммы абсолютных значений $\beta_1, \beta_2, \ldots$ быстро сходится, после чего можно произвести интегрирование по известным формулам.

Таким образом, получаем V представленным совершенно определенным и быстро сходящимся рядом вида

$$V_0 + V_1 \cos t_1 + V_2 \cos 2t_1 + \ldots$$

Коэффициенты этого ряда относительно a, $\log a$, $\log (1+\beta)$, $\beta_1, \beta_2, \ldots$ являются целыми функциями (с бесконечным числом членов), коэффициенты которых суть дробные рациональные функции β; при этом нужно заметить, что $\log a$ встречается только умноженным на некоторую степень a.

Входящая в уравнение (1) величина

$$\frac{M}{\sqrt{\rho_1^2 + z_1^2}} = \frac{M}{\sqrt{(1 - a \cos t_1)^2 + a^2 \varphi^2 (t_1)}} =$$

также разлагается в быстро сходящийся ряд вида

$$m_0+m_1\cos t_1+m_2\cos 2t_1+\ldots$$

где коэффициенты m_0, $m_1, \ldots$ — целые функции (с бесконечным числом членов) от a, β, $\beta_1, \ldots$ Окончательно

$$\rho_1{}^2=(1-a\cos t_1)^2=1+\frac{1}{2}a^2-2a\cos t_1+\frac{1}{2}a^2\cos 2t_1$$

Итак, для того, чтобы жидкость, покрывающая кольцо заданной формы, во время вращения тела сохраняла положение равновесия, необходимо величины n, C, β, β_1, $\beta_2, \ldots$ определить так, чтобы

$$V_0+m_0+\frac{1}{2}n^2\left(1+\frac{1}{2}a^2\right)+C=0$$

$$V_1+m_1-n^2a=0 \qquad (11)$$

$$V_2+m_2+\frac{1}{4}n^2a^2=0$$

и для каждого положительного значения ν

$$V_{\nu+2}+m_{\nu+2}=0 \qquad (12)$$

Все эти уравнения могут быть удовлетворены только тогда, когда ряд величин β, β_1, $\beta_2, \ldots$ бесконечен. Но так как тогда в каждое уравнение в отдельности входит также бесконечное число этих величин, то непосредственно определить их невозможно. Однако можно попробовать следующий способ, если проведение вычисления не приведет к непреодолимым трудностям. Принимая

$$\varphi(t)=\beta^{(\mu)}\sin t+\beta_1^{(\mu)}\sin 2t+\ldots\beta_\mu^{(\mu)}\sin(\mu+1)t$$

и вычисляя коэффициенты V_λ, m_λ, определяем

$$n^{(\mu)},\ C^{(\mu)},\ \beta^{(\mu)},\ \beta_1^{(\mu)},\ldots,\ \beta_\mu^{(\mu)}$$

так, чтобы удовлетворить первым $(\mu+3)$ из уравнений (11), (12).

Если тогда удастся доказать, что эти величины для $\mu=\infty$ стремятся к определенным конечным пределам и притом

так, что сумма абсолютных значений предельных значений $\beta_1, \beta_2, \ldots$ мала по сравнению с предельным значением β, то можно заключить, что уравнениям (11), (12) можно удовлетворить, заменив каждую из величин

$$n^{(\mu)}, \; C^{(\mu)}, \; \beta^{(\mu)}, \; \beta_1^{(\mu)}, \ldots$$

предельными значениями

$$n, \; C, \; \beta, \; \beta_1, \ldots$$

Это рассуждение служит только для того, чтобы сделать наглядным возможность подсчета этих величин.

Как угодно далеко проведенное приближенное определение их можно получить следующим образом. Положив

$$\varphi = \beta \sin t + \beta_1 \sin 2t + \ldots + \beta_\mu \sin (\mu + 1) t$$

делаем предварительно только предположение, что сумма абсолютных значений $\beta_1, \ldots, \beta_\mu$ — малая величина того же порядка, что и a, и отбросив в прежде выполненном разложении для V_λ, m_λ величины порядка выше $(\mu + 2)$, считая при этом $a^m \log a$ малой величиной порядка выше $m - 1$. Исследуя затем более подробно $\mu + 3$ первые уравнения (11), (12), найдем, что получаемые из них значения $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\mu$ будут малые величины соответственно 1-го, 2-го, ..., m-го порядка.

Значит, можно положить

$$\beta_1 = a\gamma_1, \quad \beta_2 = a^2\gamma_2, \ldots, \beta_\mu = a^\mu \gamma_\mu$$

чтобы таким образом из указанных уравнений получить конечные величины для $\gamma_1, \ldots, \gamma_\mu$ и притом, после определения β_0, каждую следующую однозначно. Одновременно получается, что для таким образом определенных величин $\beta_1, \ldots, \beta_m$ выражения в левых частях всех остальных уравнений (11), (12) суть малые величины порядка выше $\mu + 2$.

Таким образом, получается результат: можно определить

поперечное сечение кольца так, чтобы выражение

$$V + \frac{M}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} + \frac{1}{2} n^2 \rho^2$$

которое должно на поверхности кольца сохранять неизменное значение, было повсюду отлично от постоянной только на малую величину порядка выше $\mu + 2$, принимая $2a$ — толщину кольца—за малую величину первого порядка.

Так как $\mu + 2$ можно принять произвольно большим, то нужно заключить, что такая форма поперечного сечения кольца, при которой предыдущее выражение постоянно на поверхности кольца, действительно существует.

Я полностью провела этот—все же еще очень длинный—расчет для $\mu = 1$ главным образом для того, чтобы испытать, насколько лапласовский результат приближенно верен, и чтобы получить, по крайней мере в главной части, отклонение поперечного сечения кольца от эллиптической формы. Впрочем, от еще более точного определения поперечного сечения кольца удержало меня, помимо трудностей вычисления, то обстоятельство, что по исследованиям Максвелла (Maxwell, On the stability of the motion of Saturn's Rings, Cambridge, 1859) стало сомнительным, приемлемо ли вообще воззрение Лапласа о строении колец Сатурна [1]. При массе центрального тела равной нулю поверхность кольца совпадает с поверхностью, какую имело бы кольцо, если бы его масса состояла из однородной жидкости. Представляет значительный теоретический интерес вопрос, будет ли такое жидкое кольцо рассмотренной здесь формы сохранять положение равновесия при равномерном вращении вокруг своей оси. Однако, чтобы это можно было подтвердить, необходимо, кроме точного определения формы поверхности кольца из уравнения

$$V + \frac{1}{2} n^2 \rho^2 + C = 0$$

еще провести исследование устойчивости равновесия, что мне до сих пор не удалось. [2]

Я сейчас приведу формулы, служащие для определения поперечного сечения кольца с точностью до величин третьего порядка (включительно). При подсчете необходимо в выражениях

$$W_2, \quad W_1 \log B, \quad W_1 \log(A + B), \quad \frac{M}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

отбросить все члены выше третьего порядка.

Таким образом, получается

$$V = \pi a^2 (v_0 + v_1 \cos t_1 + v_2 \cos 2t_1 + v_3 \cos 3t_1)$$

$$v_0 = \beta \left(\log \frac{256}{a^2(1+\beta)^2} - 2\right)$$

$$v_1 = a\beta \left(\frac{-11 + 9\beta - \beta^2 + 3\beta^3}{4(1+\beta)} + \log \frac{256}{a^2(1+\beta)^2}\right) + 2a \frac{1 + \beta - \beta^2}{(1+\beta)^2} \gamma$$

$$v_2 = -\beta \frac{1-\beta}{1+\beta}$$

$$v_3 = -a\beta \frac{(1-\beta)(1+3\beta)}{6(1+\beta)^2} + a\gamma \frac{-2 + 6\beta + 6\beta^2 + 6\beta^3}{3(1+\beta)^3}$$

Далее

$$\frac{M}{\sqrt{\rho_1^2 + z_1^2}} = m_0 + m_1 \cos t_1 + m_2 \cos 2t_1 + m_3 \cos 3t_1$$

$$m_0 = M$$

$$m_1 = aM \left[1 + a^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{8}\beta^2 - \frac{1}{2}\beta\gamma\right)\right]$$

$$m_2 = a^2 M \frac{1}{4}(2 + \beta^2)$$

$$m_3 = a^3 M \left[\frac{1}{8}(2 + 3\beta^2) + \frac{1}{2}\beta\gamma\right]$$

Наконец,

$$\frac{1}{2} n^2 \rho^2 = \frac{1}{2} n^2 \left(1 + \frac{1}{2} a^2\right) - n^2 a \cos t_1 + \frac{1}{4} n^2 a^2 \cos 2t_1$$

Второе, третье и четвертое из вышенаписанных условий

$$\pi a^2 v_1 + m_1 \qquad - a n^2 = 0$$

$$\pi a^2 v_2 + m_2 + \frac{1}{4} a^2 n^2 = 0$$

$$\pi a^2 v_3 + m_3 \qquad = 0$$

переходят тогда в следующие:

$$\pi a^2 \beta \left(\frac{-11 + 9\beta - \beta^2 + 3\beta^3}{4(1+\beta)} + \log \frac{256}{a^2(1+\beta)^2} \right) + a^2 M \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{8}\beta^2 \right) + \\ + \left(2\pi \frac{1 + \beta - \beta^2}{(1+\beta)^2} - \frac{1}{2} M\beta \right) a^2 \gamma + M - n^2 = 0$$

$$M(2 + \beta^2) - 4\beta \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \pi + n^2 = 0$$

$$M \frac{2 + 3\beta^2}{8} - \pi \frac{\beta(1-\beta)(1+3\beta)}{6(1+\beta)^2} + \\ + \left(\frac{1}{2} M\beta + \frac{-2 + 6\beta + 6\beta^2 + 6\beta^3}{3(1+\beta)^3} \right) \gamma = 0$$

Из последнего уравнения следует

$$\gamma = \frac{1}{4} \frac{3M(2 + 3\beta^2)(1+\beta)^2 - 4\pi\beta(1-\beta)(1+3\beta)}{4 - 12\beta - 12\beta^2 - 12\beta^3 - 3M\beta(1+\beta)^3} (1+\beta) \qquad (1)$$

Тогда первое из этих уравнений дает [3]

$$n^2 = M + a^2 N \qquad (2)$$

где

$$N = \pi\beta \left(\frac{-11 + 9\beta - \beta^2 + 3\beta^3}{4(1+\beta)} + \log \frac{256}{a^2(1+\beta)^2} \right) + \\ + M \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{8}\beta^2 \right) + \left(2\pi \frac{1 + \beta - \beta^2}{(1+\beta)^2} - \frac{1}{2} M\beta \right) \gamma$$

Наконец, второе уравнение приводит к уравнению

$$M(3+\beta^2)-\frac{4\beta(1-\beta)}{1+\beta}\pi+a^2N=0 \qquad (3)$$

служащему для вычисления β; в нем входящую в N величину γ нужно заменить выражением (1).

Пренебрегая в предыдущем уравнении членом, умноженным на a^2, получим найденное Лапласом уравнение для вычисления β

$$M(3+\beta^2)-\frac{4\beta(1-\beta)}{1+\beta}\pi=0$$

Величина β положительна и должна быть не больше 1, чтобы M было положительно.

Отсюда следует, как это было замечено Лапласом, что $\frac{M}{4\pi}$ не должно превосходить определенной величины (0.0543). При этом предположении уравнение Лапласа имеет два положительных корня. Если β_0 один из них, то из (3) мы получаем до величины четвертого порядка

$$\beta=\beta_0-\frac{a^2N_0}{2M\beta_0-4+\frac{8}{(1+\beta_0)^2}}$$

где N_0 есть значение N для β_0.

Подставляя это значение для β в выражение (1) для γ, получим также эту величину с той же степенью приближения; аналогично получаем из (2)

$$n^2=M+a^2N_0$$

Я хочу еще отметить, что при достаточно малом значении M, если взять меньшее из значений β, кривизна поперечного сечения кольца в точке, ближайшей к центру, будет больше, чем в противоположной точке. Беря большее значение для β, получим противоположный результат.



ЗАДАЧА О ВРАЩЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА ОКОЛО НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ *

(*Стокгольм*)

§ 1

Задача о вращении тяжелого твердого тела около неподвижной точки может быть приведена, как известно, к интегрированию следующей системы дифференциальных уравнений:

$$
\begin{aligned}
A\frac{dp}{dt} &= (B-C)\,qr + Mg\,(y_0\gamma'' - z_0\gamma'), & \frac{d\gamma}{dt} &= r\gamma' - q\gamma'' \\
B\frac{dq}{dt} &= (C-A)rp + Mg\,(z_0\gamma - x_0\gamma''), & \frac{d\gamma'}{dt} &= p\gamma'' - r\gamma \qquad (1) \\
C\frac{dr}{dt} &= (A-B)\,pq + Mg\,(x_0\gamma' - y_0\gamma), & \frac{d\gamma''}{dt} &= q\gamma - p\gamma'
\end{aligned}
$$

Постоянные A, B, C, Mg, x_0, y_0, z_0, фигурирующие в этих уравнениях, имеют следующие значения: A, B, C — главные оси эллипсоида инерции рассматриваемого тела относительно неподвижной точки, M — масса тела, g — интенсивность силы тяжести, x_0, y_0, z_0 — координаты центра тяжести рассмат-

---

* Этот мемуар представляет собой резюме работы, которой Парижская академия наук на торжественном заседании 24 декабря 1888 г. присудила премию Бордена, увеличенную с 3000 до 5000 франков.

риваемого тела в системе координат, начало которой находится в неподвижной точке и направление осей которой совпадает с направлением главных осей эллипсоида инерции.

До настоящего времени удалось проинтегрировать эти уравнения только в двух частных случаях:

1) в случае Пуассона (или Эйлера), где

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0$$

2) в случае Лагранжа, где

$$A = B; \qquad x_0 = y_0 = 0$$

В этих двух случаях интегрирование производится с помощью функций $\vartheta(u)$, аргумент которых есть целая линейная функция времени.

Шесть величин p, q, r, γ, γ', γ'' являются в обоих этих случаях однозначными функциями времени, не имеющими других особенностей, кроме полюсов для всех конечных значений независимой переменной.

Сохраняют ли интегралы рассматриваемых дифференциальных уравнений это свойство в общем случае?

Если бы это было так, то можно было бы проинтегрировать эти дифференциальные уравнения с помощью рядов вида

$$\begin{aligned}
p &= t^{-n_1}(p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \ldots) \\
q &= t^{-n_2}(q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + \ldots) \\
r &= t^{-n_3}(r_0 + r_1 t + r_2 t^2 + \ldots) \\
\gamma &= t^{-m_1}(f_0 + f_1 t + f_2 t^2 + \ldots) \\
\gamma' &= t^{-m_2}(g_0 + g_1 t + g_2 t^2 + \ldots) \\
\gamma'' &= t^{-m_3}(h_0 + h_1 t + h_2 t^2 + \ldots)
\end{aligned} \qquad (2)$$

где n_1, n_2, n_3, m_1, m_2, m_3 — положительные целые числа, причем для того, чтобы эти ряды могли представить общую систему интегралов рассматриваемых дифференциальных уравнений, они должны были бы содержать *пять* произвольных постоянных.[1]

Нужно, следовательно, посмотреть, возможно ли подобное интегрирование.

Легко убедиться, сравнивая показатели первых членов в левых и правых частях рассматриваемых уравнений, что должны иметь

$$n_1 = n_2 = n_3 = 1, \qquad m_1 = m_2 = m_3 = 2$$

Затем, полагая для краткости

$$A_1 = B - C, \qquad B_1 = C - A, \qquad C_1 = A - B$$

и предполагая единицу длины выбранной так, что $Mg = 1$, находим, что коэффициенты p_0, q_0, r_0 должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} -Ap_0 &= A_1 q_0 r_0 + y_0 h_0 - z_0 g_0 \\ -Bq_0 &= B_1 r_0 p_0 + z_0 f_0 - x_0 h_0 \\ -Cr_0 &= C_1 p_0 q_0 + x_0 g_0 - y_0 f_0 \\ -2f_0 &= r_0 g_0 - q_0 h_0 \\ -2g_0 &= p_0 h_0 - r_0 f_0 \\ -2h_0 &= q_0 f_0 - p_0 g_0 \end{aligned} \tag{3}$$

Для того чтобы три последних уравнения могли быть удовлетворены отличными от нуля значениями f_0, g_0, h_0, нужно, чтобы определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & r_0 & -q_0 \\ -r_0 & 2 & p_0 \\ q_0 & -p_0 & 2 \end{vmatrix} = 2(4 + p_0^2 + q_0^2 + r_0^2)$$

равнялся нулю.

Если сложим первые три уравнения (3), умноженные соответственно на Ap_0, Bq_0, Cr_0, то найдем

$$A^2 p_0^2 + B^2 q_0^2 + C^2 r_0^2 = \tag{4}$$

$$= x_0 (Bq_0 h_0 - Cr_0 g_0) + y_0 (Cr_0 f_0 - Ap_0 h_0) + z_0 (Ap_0 g_0 - Bq_0 f_0)$$

но из трех последних уравнений (3) следует

$$
\begin{aligned}
2(Bq_0h_0 - Cr_0g_0) &= p_0(Ap_0f_0 + Bq_0g_0 + Cr_0h_0) - \\
&\quad - f_0(Ap_0^2 + Bq_0^2 + Cr_0^2) \\
2(Cr_0f_0 - Ap_0h_0) &= q_0(Ap_0f_0 + Bq_0g_0 + Cr_0h_0) - \\
&\quad - g_0(Ap_0^2 + Bq_0^2 + Cr_0^2) \\
2(Ap_0g_0 - Bq_0f_0) &= r_0(Ap_0f_0 + Bq_0g_0 + Cr_0h_0) - \\
&\quad - h_0(Ap_0^2 + Bq_0^2 + Cr_0^2)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Так как шесть величин p, q, r, γ, γ', γ'' должны удовлетворять двум алгебраическим соотношениям

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2(x_0\gamma + y_0\gamma' + z_0\gamma'') + l_1$$

$$A\gamma p + B\gamma' q + C\gamma'' r = l$$

где l и l_1 — постоянные интегрирования, то надо, чтобы

$$Ap_0f_0 + Bq_0g_0 + Cr_0h_0 = 0$$

$$x_0f_0 + y_0g_0 + z_0h_0 = \frac{1}{2}(Ap_0^2 + Bq_0^2 + Cr_0^2)$$

Следовательно, из уравнений (4) и (5) вытекает

$$A^2p_0^2 + B^2q_0^2 + C^2r_0^2 = -\frac{1}{4}(Ap_0^2 + Bq_0^2 + Cr_0^2)^2$$

Теперь следует различать два случая.

1-й случай. Предположим, что ни одна из величин

$$A_1 = B - C, \qquad B_1 = C - A, \qquad C_1 = A - B$$

не равна нулю. Тогда, если положим

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}(p_0^2 + q_0^2 + r_0^2) &= \lambda_0 \\
\frac{1}{2}(Ap_0^2 + Bq_0^2 + Cr_0^2) &= \lambda \\
\frac{1}{2}(A^2p_0^2 + B^2q_0^2 + C^2r_0^2) &= \lambda_1
\end{aligned}
$$

то будем иметь

$$\frac{1}{2}p_0^2 = -\frac{BC\lambda_0 - (B+C)\lambda + \lambda_1}{B_1C_1}$$

$$\frac{1}{2}q_0^2 = -\frac{CA\lambda_0 - (C+A)\lambda + \lambda_1}{C_1A_1}$$

$$\frac{1}{2}r_0^2 = -\frac{AB\lambda_0 - (A+B)\lambda + \lambda_1}{A_1B_1}$$

Но мы нашли

$$\lambda_0 = -2, \qquad \lambda_1 = -\frac{1}{2}\lambda^2$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} p_0^2 &= \frac{4BC + 2(B+C)\lambda + \lambda^2}{B_1C_1} = \frac{(2B+\lambda)(2C+\lambda)}{B_1C_1} \\ q_0^2 &= \frac{4CA + 2(C+A)\lambda + \lambda^2}{C_1A_1} = \frac{(2C+\lambda)(2A+\lambda)}{C_1A_1} \\ r_0^2 &= \frac{4AB + 2(A+B)\lambda + \lambda^2}{A_1B_1} = \frac{(2A+\lambda)(2B+\lambda)}{A_1B_1} \end{aligned} \tag{6}$$

Если сложим первые три из уравнений (3), умножив их соответственно на x_0, y_0, z_0, то найдем

$$x_0(Ap_0 + A_1q_0r_0) + y_0(Bq_0 + B_1r_0p_0) + z_0(Cr_0 + C_1p_0q_0) = 0 \tag{7}$$

Это уравнение служит для определения величины λ.

Три величины f_0, g_0, h_0 должны удовлетворять трем следующим уравнениям:

$$p_0f_0 + q_0g_0 + r_0h_0 = 0$$

$$Ap_0f_0 + Bq_0g_0 + Cr_0h_0 = 0$$

$$x_0f_0 + y_0g_0 + z_0h_0 = \lambda$$

Отсюда, полагая

$$\mu = -(A_1x_0q_0r_0 + B_1y_0r_0p_0 + C_1z_0p_0q_0) = Ax_0p_0 + By_0q_0 + Cz_0r_0$$

находим

$$f_0 = -A_1 q_0 r_0 \frac{\lambda}{\mu}$$
$$g_0 = -B_1 r_0 p_0 \frac{\lambda}{\mu} \qquad (8)$$
$$h_0 = -C_1 p_0 q_0 \frac{\lambda}{\mu}$$

Уравнения (6) и (7) определяют величины p_0, q_0, r_0 с точностью до знака.

Если положим

$$a = \sqrt{\frac{2A+\lambda}{A_1}}, \qquad b = \sqrt{\frac{2B+\lambda}{B_1}}, \qquad c = \sqrt{\frac{2C+\lambda}{C_1}}$$

фиксируя знаки величин a, b, c произвольным образом, то найдем, что для того чтобы удовлетворить всем уравнениям (3), надо положить

$$p_0 = bc$$
$$q_0 = ca$$
$$r_0 = -ab$$

Следовательно, уравнение (7) может быть написано таким образом:

$$x_0(A+\lambda)p_0 + y_0(B+\lambda)q_0 + z_0(C+\lambda)r_0 = 0$$

или

$$x_0(A+\lambda)bc + y_0(B+\lambda)ca - z_0(C+\lambda)ab = 0$$

2-й случай. Предположим теперь, что одна из величин A_1, B_1, C_1 (например C_1) равняется нулю (В этом случае всегда можно положить $y_0 = 0$). Чтобы удовлетворить двум уравнениям

$$A(p_0 f_0 + q_0 g_0) + C r_0 h_0 = 0$$
$$p_0 f_0 + q_0 g_0 + r_0 h_0 = 0$$

необходимо иметь

$$r_0 h_0 = 0$$

Следовательно, уравнения (3) допускают две системы решений, которые могут быть написаны, если обозначить ± 1 через ε:

I.
$$p_0 = \varepsilon i \frac{2C}{A-2C} \frac{z_0}{x_0}, \qquad f_0 = -\frac{2C}{x_0}$$
$$q_0 = \varepsilon i p_0, \qquad g_0 = -i\varepsilon \frac{2C}{x_0}$$
$$r_0 = 2\varepsilon i, \qquad h_0 = 0$$

II.
$$p_0 = 0, \qquad f_0 = -\frac{2A}{x_0 - i\varepsilon z_0}$$
$$q_0 = 2\varepsilon i, \qquad g = 0$$
$$r_0 = 0, \qquad h_0 = \varepsilon i \frac{2A}{x_0 - i\varepsilon z_0}$$

Определив коэффициенты p_0, q_0, r_0, f_0, g_0, h_0, получим коэффициенты p_m, q_m, r_m, f_m, g_m, h_m, решая систему следующих линейных уравнений:

$$(m-1) A p_m - A_1 (q_0 r_m + r_0 q_m) + z_0 g_m - y_0 h_m = P_m$$
$$(m-1) B q_m - B_1 (r_0 p_m + p_0 r_m) + x_0 h_m - z_0 f_m = Q_m$$
$$(m-1) C r_m - C_1 (p_0 q_m + q_0 p_m) + y_0 f_m - x_0 g_m = R_m$$
$$(m-2) f_m - r_0 g_m + q_0 h_m - g_0 r_m + h_0 q_m = F_m$$
$$(m-2) g_m - p_0 h_m + r_0 f_m - h_0 p_m + f_0 r_m = G_m$$
$$(m-2) h_m - q_0 f_m + p_0 g_m - f_0 q_m + g_0 p_m = H_m$$

Правые части этих уравнений суть целые функции коэффициентов p_μ, q_μ, r_μ, f_μ, g_μ, h_μ, у которых индекс $\mu < m$.

Для того чтобы ряды

$$p = t^{-1} \Sigma p_m t^m, \qquad \gamma = t^{-2} \Sigma f_m t^m$$
$$q = t^{-1} \Sigma q_m t^m, \qquad \gamma' = t^{-2} \Sigma g_m t^m$$
$$r = t^{-1} \Sigma r_m t^m, \qquad \gamma'' = t^{-2} \Sigma h_m t^m$$

содержали достаточное число произвольных постоянных, нуж-

но, чтобы определитель этих линейных уравнений, который является целой функцией 6-й степени относительно m, исчезал для пяти различных значений m, равных целым положительным числам. Кроме того, нужно, чтобы величины P_m, Q_m, R_m, F_m, G_m, H_m были такими, чтобы предыдущие уравнения были совместны.

Произведя вычисления, я убедилась, что эти условия в общем случае не выполняются(2), но что, кроме двух уже известных случаев, они выполняются также в одном новом случае, где постоянные удовлетворяют следующим уравнениям:

$$A=B=2C, \; z_0=0$$

Этот случай я предполагаю изучить в следующих параграфах.

§ 2

В случае, который мы будем рассматривать:

$$A=B=2C, \qquad z_0=0$$

Поворотом осей координат в плоскости xy и подходящим выбором единицы длины можно всегда добиться того, что будем, кроме того, иметь в этом случае

$$y_0=0, \qquad C=1$$

Тогда, если я положу

$$c_0=Mgx_0$$

то дифференциальные уравнения, подлежащие нашему рассмотрению, будут следующие:

$$\begin{aligned} 2\frac{dp}{dt}&=qr, & \frac{d\gamma}{dt}&=r\gamma'-q\gamma'' \\ 2\frac{dq}{dt}&=-pr-c_0\gamma'', & \frac{d\gamma'}{dt}&=p\gamma''-r\gamma \\ \frac{dr}{dt}&=c_0\gamma', & \frac{d\gamma''}{dt}&=q\gamma-p\gamma' \end{aligned} \tag{1}$$

Три алгебраических интеграла общего случая в этом случае таковы:

$$\begin{aligned} &2(p^2 + q^2) + r^2 = 2c_0\gamma + 6l_1 \\ &2(p\gamma + q\gamma') + r\gamma'' = 2l \\ &\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1 \end{aligned} \tag{2}$$

Кроме этих трех алгебраических интегралов, легко находим еще четвертый.

В самом деле, имеем (полагая $i = \sqrt{-1}$)

$$2\frac{d}{dt}(p + qi) = -ri(p + qi) - c_0 i\gamma''$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma + \gamma' i) = -ri(\gamma + \gamma' i) + \gamma'' i(p + qi)$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}\{(p + qi)^2 + c_0(\gamma + \gamma' i)\} = -ri\{(p + qi)^2 + c_0(\gamma + \gamma' i)\}$$

а также

$$\frac{d}{dt}\{(p - qi)^2 + c_0(\gamma - \gamma' i)\} = ri\{(p - qi)^2 + c_0(\gamma - \gamma' i)\}$$

откуда вытекает

$$\frac{d}{dt}\lg\{(p + qi)^2 + c_0(\gamma + i\gamma')\} + \frac{d}{dt}\lg\{(p - qi)^2 + c_0(\gamma - i\gamma')\} = 0$$

и после интегрирования

$$\{(p + qi)^2 + c_0(\gamma + i\gamma')\}\{(p - qi)^2 + c_0(\gamma - i\gamma')\} = k^2 \tag{3}$$

где через k обозначена вещественная произвольная постоянная величина.

Положим

$$x_1 = p + qi, \qquad y_1 = \gamma + \gamma' i$$
$$x_2 = p - qi, \qquad y_2 = \gamma - \gamma' i$$

$$\xi_1 = (p + qi)^2 + c_0(\gamma + \gamma' i) = x_1^2 + c_0 y_1$$
$$\xi_2 = (p - qi)^2 + c_0(\gamma - \gamma' i) = x_2^2 + c_0 y_2$$

Уравнение (3) перепишется тогда в виде

$$\xi_1 \xi_2 = k^2$$

Из уравнений (2) находим r^2, $r\gamma''$, γ''^2, выраженные через x_1, x_2, ξ_1, ξ_2. Имеем

$$\begin{aligned} r^2 &= 6l_1 - (x_1 + x_2)^2 + \xi_1 + \xi_2 \\ c_0 r\gamma'' &= 2lc_0 + x_1 x_2 (x_1 + x_2) - x_2\xi_1 - x_1\xi_2 \\ c_0^2\gamma''^2 &= c_0^2 - k^2 - x_1^2 x_2^2 + x_2^2 \xi_1 + x_1^2 \xi_2 \end{aligned} \tag{4}$$

или, полагая

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= 6l_1 - (x_1 + x_2)^2 \\ \mathcal{B} &= 2lc_0 + x_1 x_2 (x_1 + x_2) \\ \mathcal{C} &= c_0^2 - k^2 - x_1^2 x_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r^2 &= \mathcal{A} + \xi_1 + \xi_2 \\ c_0 r\gamma'' &= \mathcal{B} - x_2 \xi_1 - x_1 \xi_2 \\ c_0^2 \gamma''^2 &= \mathcal{C} + x_2^2 \xi_1 + x_1^2 \xi_2 \end{aligned} \tag{4'}$$

Следовательно, четыре величины x_1, x_2, ξ_1, ξ_2 удовлетворяют двум следующим алгебраическим соотношениям:

$$\xi_1 \xi_2 = k^2 \tag{5}$$

$$(\mathcal{A} + \xi_1 + \xi_2)(\mathcal{C} + x_2^2 \xi_1 + x_1^2 \xi_2) - (\mathcal{B} - x_2\xi_1 - x_1\xi_2)^2 = 0$$

Положим

$$R(x_1) = \mathcal{A}x_1^2 + 2\mathcal{B}x_1 + \mathcal{C} = -x_1^4 + 6l_1 x_1^2 + 4lc_0 x_1 + c_0^2 - k^2$$

$$R(x_2) = \mathcal{A}x_2^2 + 2\mathcal{B}x_2 + \mathcal{C} = -x_2^4 + 6l_1 x_2^2 + 4lc_0 x_2 + c_0^2 - k^2$$

$$\begin{aligned} R(x_1 x_2) = \mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2 = &- 6l_1 x_1^2 x_2^2 - (c_0^2 - k^2)(x_1 + x_2)^2 - \\ &- 4lc_0 (x_1 + x_2) x_1 x_2 + 6l_1 (c_0^2 - k^2) - 4l^2 c_0^2 \end{aligned}$$

Тогда уравнения (5) в развернутом виде становятся такими:

$$\xi_1 \xi_2 = k^2 \tag{5'}$$

$$R(x_2)\xi_1 + R(x_1)\xi_2 + R_1(x_1 x_2) + k^2(x_1 - x_2)^2 = 0$$

Положим, кроме того,

$$R(x_1 x_2) = \mathcal{A} x_1 x_2 + \mathcal{B}(x_1 + x_2) + C =$$
$$= -x_1^2 x_2^2 + 6l_1 x_1 x_2 + 2lc_0(x_1 + x_2) + c_0^2 - k^2$$

Тогда будем иметь тождество

$$R(x_1)R(x_2) - R(x_1 x_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 R_1(x_1 x_2) \tag{6}$$

Положим

$$W^2 = \{R_1(x_1x_2) + k^2(x_1 - x_2)^2\}^2 - 4k^2 R(x_1) R(x_2) = \tag{7}$$
$$= \{R_1(x_1x_2) + k^2(x_1 - x_2)^2\}^2 - 4k^2\{R(x_1 x_2)^2 +$$
$$+ (x_1 - x_2)^2 R_1(x_1 x_2)\} =$$
$$= \{R_1(x_1x_2) - k^2(x_1 - x_2)^2\}^2 - 4k^2 R(x_1 x_2)^2 =$$
$$= \{R_1(x_1x_2) - k^2(x_1 - x_2)^2 - 2kR(x_1x_2)\}\{R_1(x_1x_2) -$$
$$- k^2(x_1 - x_2)^2 + 2kR(x_1x_2)\}$$

Принимая во внимание, что согласно тождеству (6)

$$k^2(x_1 - x_2)^2 + 2kR(x_1x_2) - R_1(x_1x_2) = \frac{1}{(x_1 - x_2)^2}\Big\{k^2(x_1 - x_2)^4 +$$
$$+ 2k(x_1 - x_2)^2 R(x_1x_2) + R(x_1x_2)^2 - R(x_1)R(x_2)\Big\} =$$
$$= \frac{1}{(x_1 - x_2)^2}\{[k(x_1 - x_2)^2 + R(x_1x_2)]^2 - R(x_1)R(x_2)\} =$$
$$= (x_1 - x_2)^2\left\{\frac{R(x_1x_2) - \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1 - x_2)^2} + k\right\} \times$$
$$\times \left\{\frac{R(x_1x_2) + \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1 - x_2)^2} + k\right\}$$

а также

$$k^2(x_1-x_2)^2-2kR(x_1x_2)-R_1(x_1x_2)=$$

$$=(x_1-x_2)^2\left\{\frac{R(x_1x_2)-\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1-x_2)^2}-k\right\}\times$$

$$\times\left\{\frac{R(x_1x_2)+\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1-x_2)^2}-k\right\}$$

можно написать

$$W^2=(x_1-x_2)^4\left\{\frac{R(x_1x_2)-\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1-x_2)^2}-k\right\}\times$$

$$\times\left\{\frac{R(x_1x_2)-\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1-x_2)^2}+k\right\}\times$$

$$\times\left\{\frac{R(x_1x_2)+\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1-x_2)^2}+k\right\}\times$$

$$\times\left\{\frac{R(x_1x_2)+\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1-x_2)^2}-k\right\} \qquad (7')$$

и тогда будем иметь

$$\xi_1=-\frac{R_1(x_1x_2)+k^2(x_1-x_2)^2-W}{2R(x_2)}$$

$$\xi_2=-\frac{R_1(x_1x_2)+k^2(x_1-x_2)^2+W}{2R(x_1)} \qquad (8)$$

Вместо двух переменных x_1 и x_2 введем теперь две новые переменные s_1 и s_2, определенные уравнениями

$$s_1=\frac{R(x_1x_2)-\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{2(x_1-x_2)^2}+\frac{1}{2}l_1$$

$$s_2=\frac{R(x_1x_2)+\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{2(x_1-x_2)^2}+\frac{1}{2}l_1 \qquad (9)$$

Мы видим, что s_1 и s_2 суть два корня алгебраического уравнения 2-й степени

$$(x_1-x_2)^2\left(s-\frac{1}{2}l_1\right)^2-R(x_1x_2)\left(s-\frac{1}{2}l_1\right)-\frac{1}{4}R_1(x_1x_2)=0$$

Имеем теперь

$$W^2=(x_1-x_2)^4(2s_1-l_1-k)(2s_1-l_1+k)\times$$
$$\times(2s_2-l_1-k)(2s_2-l_1+k)$$

или, полагая

$$k_1=\frac{l_1+k}{2},\qquad k_2=\frac{l_1-k}{2}$$

будем иметь

$$W^2=16(x_1-x_2)^4(s_1-k_1)(s_2-k_1)(s_1-k_2)(s_2-k_2) \tag{10}$$

$$\xi_1=\frac{(x_1-x_2)^2}{R(x_2)}\{[\sqrt{(s_1-k_1)(s_2-k_1)}+\sqrt{(s_1-k_2)(s_2-k_2)}]^2-k^2\}$$

$$\xi_2=\frac{(x_1-x_2)^2}{R(x_1)}\{[\sqrt{(s_1-k_1)(s_2-k_1)}-\sqrt{(s_1-k_2)(s_2-k_2)}]^2-k^2\} \tag{11}$$

Установим теперь дифференциальные уравнения, которые определяют эти две новые переменные s_1 и s_2 как функции времени.

Положив

$$\begin{aligned} g_2&=k^2-c_0^2+3l_1^2\\ g_3&=l_1(k^2-c_0^2-l_1^2)+l^2c_0^2\\ S_1&=4s_1^3-g_2s_1-g_3\\ S_2&=4s_2^3-g_2s_2-g_3 \end{aligned} \tag{12}$$

находим

$$\sqrt{S_1} = \frac{R(x_1) - {}^1/_4 (x_1 - x_2) R'(x_1)}{(x_1 - x_2)^3} \sqrt{R(x_2)} - $$

$$- \frac{R(x_2) + {}^1/_4 (x_1 - x_2) R'(x_2)}{(x_1 - x_2)^3} \sqrt{R(x_1)}$$

$$\sqrt{S_2} = \frac{R(x_1) - {}^1/_4 (x_1 - x_2) R'(x_1)}{(x_1 - x_2)^3} \sqrt{R(x_2)} + $$

$$+ \frac{R(x_2) + {}^1/_4 (x_1 - x_2) R'(x_2)}{(x_1 - x_2)^3} \sqrt{R(x_1)}$$

$$\begin{aligned} \frac{ds_1}{\sqrt{S_1}} &= \frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} \\ \frac{ds_2}{\sqrt{S_2}} &= -\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} \end{aligned} \qquad (13)$$

Из дифференциальных уравнений (1) следует, так как $x_1 = p + qi, \quad x_2 = p - qi$:

$$\begin{aligned} 2i \frac{dx_1}{dt} &= rx_1 + c_0 \gamma'' \\ -2i \frac{dx_2}{dt} &= rx_2 + c_0 \gamma'' \end{aligned} \qquad (14)$$

Следовательно,

$$-4 \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 = r^2 x_1^2 + 2rc_0 \gamma'' x_1 + c_0^2 \gamma''^2$$

или, написав вместо r^2, $c_0 r\gamma''$, $c_0^2 \gamma''^2$ их выражения, определяемые уравнениями (4'):

$$-4 \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 = x_1^2 (\mathcal{A} + \xi_1 + \xi_2) + 2x_1 (\mathcal{B} - x_2 \xi_1 - x_1 \xi_2) + $$

$$+ C + x_2^2 \xi_1 + x_1^2 \xi_2 = R(x_1) + (x_1 - x_2)^2 \xi_1$$

Таким же образом найдем

$$-4\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 = R(x_2) + (x_1 - x_2)^2 \xi_2$$

и

$$4\frac{dx_1}{dt}\frac{dx_2}{dt} = r^2 x_1 x_2 + r c_0 \gamma''(x_1 + x_2) + c_0^2 \gamma''^2 = x_1 x_2 (\mathcal{A} + \xi_1 + \xi_2) +$$
$$+ (x_1 + x_2)(\mathcal{B} - x_2 \xi_1 - x_1 \xi_2) + C + x_2^2 \xi_1 + x_1^2 \xi_2 = R(x_1 x_2)$$

Возведя в квадрат обе части первого из уравнений (13), находим

$$-4\frac{1}{S_1}\left(\frac{ds_1}{dt}\right)^2 =$$
$$= -\frac{4}{R(x_1)}\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 - \frac{4}{R(x_2)}\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 - \frac{8}{\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}\frac{dx_1}{dt}\frac{dx_2}{dt} =$$
$$= 2 + (x_1 - x_2)^2\left(\frac{\xi_1}{R(x_1)} + \frac{\xi_2}{R(x_2)}\right) - 2\frac{R(x_1 x_2)}{\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}$$

или вследствие уравнений (5′)

$$-4\left(\frac{1}{\sqrt{S_1}}\frac{ds_1}{dt}\right)^2 =$$
$$= 2 - \frac{(x_1 - x_2)^2}{R(x_1)R(x_2)}\{R_1(x_1 x_2) + k^2(x_1 - x_2)^2\} - \frac{2R(x_1 x_2)}{\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}} =$$
$$= \frac{R(x_1)R(x_2) + R(x_1 x_2)^2 - 2R(x_1 x_2)\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)} - k^2(x_1 - x_2)^4}{R(x_1)R(x_2)} =$$
$$= \frac{(x_1 - x_2)^4}{R(x_1)R(x_2)}\left\{\frac{[R(x_1 x_2) - \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}]^2}{(x_1 - x_2)^4} - k^2\right\} =$$
$$= \frac{4(x_1 - x_2)^4}{R(x_1)R(x_2)}\left(\frac{R(x_1 x_2) - \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{2(x_1 - x_2)^2} - \frac{1}{2}k\right) \times$$
$$\times\left(\frac{R(x_1 x_2) - \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{2(x_1 - x_2)^2} + \frac{k}{2}\right) = 4\frac{(x_1 - x_2)^4}{R(x_1)R(x_2)}(s_1 - k_1)(s_1 - k_2)$$

Но

$$s_2 - s_1 = \frac{\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1 - x_2)^2}$$

Следовательно,

$$-\frac{1}{S_1}\left(\frac{ds_1}{dt}\right)^2 = \frac{(s_1 - k_1)(s_1 - k_2)}{(s_1 - s_2)^2}$$

Положим

$$R_1(s) = -S(s - k_1)(s - k_2) =$$
$$= -4(s - e_1)(s - e_2)(s - e_3)(s - k_1)(s - k_2)$$

Тогда будем иметь

$$\frac{ds_1}{\sqrt{R_1(s_1)}} = \frac{dt}{s_1 - s_2}$$

Совершенно таким же образом находим

$$\frac{ds_2}{\sqrt{R_1(s_2)}} = \frac{dt}{s_2 - s_1}$$

Откуда следует

$$0 = \frac{ds_1}{\sqrt{R_1(s_1)}} + \frac{ds_2}{\sqrt{R_1(s_2)}}$$
$$dt = \frac{s_1\,ds_1}{\sqrt{R_1(s_1)}} + \frac{s_2\,ds_2}{\sqrt{R_1(s_2)}} \qquad (15)$$

Так как $R_1(s)$ есть полином 5-й степени, то, если корни уравнения $R_1(s) = 0$ все различны между собой, дифференциальные уравнения (15) приводят нас к ультраэллиптическим функциям, или, иначе говоря, к функциям Розенхайна.

Будем сначала искать выражения шести величин p, q, r, γ, γ', γ'' через две величины s_1 и s_2. Мы придем к ним с помощью формул, которые я заимствовала из неизданного курса господина Вейерштрасса об эллиптических функциях и часть которых изложена также в руководстве по эллиптическим функциям Альфана (Halphen, Traité des fonctions elliptiques), и в формулах и предложениях Шварца (Schwarz, Formeln und Lehrsätze etc).

§ 3

Пусть

$$R(x) = Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4B'x + A'$$

есть полином 4-й степени относительно переменной x. Коэффициенты A, B, C, B', A' суть постоянные, подчиненные условию, чтобы $R(x)$ не имел делителем полного квадрата.

Пусть u будет вторая переменная, связанная с x дифференциальным уравнением

$$du = \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} \tag{1}$$

Самая общая зависимость между u и x может быть выражена следующим образом.

Положим

$$\begin{gathered} g_2 = AA' - 4BB' + 3C^2 \\ g_3 = ACA' + 2BCB' - AB'B' - A'BB - C^3 \\ D = B^2 - AC, \qquad E = A^2B' - 3ABC + 2B^3 \end{gathered} \tag{2}$$

тогда имеем

$$4\left(\frac{D}{A}\right)^3 - g_2\frac{D}{A} - g_3 = \frac{E^2}{A^3} \tag{3}$$

Обозначим через $\wp(u)$ функцию $\wp(u, g_2, g_3)$ и через $\bar{\wp}(u)$ функцию $\wp(u, g_2, -g_3)$*. На основании уравнения (3) можно определить аргумент w при произвольно выбранном знаке $\sqrt{A}$ так, чтобы два уравнения

$$\wp(w) = \frac{D}{A}, \qquad \wp'(w) = -\frac{E}{A\sqrt{A}} \tag{4}$$

выполнялись одновременно.

---

* См. Halphen, Traité des fonctions elliptiques; Schwarz, Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen.

Положим

$$\varphi_0(u) = -\frac{B}{A} + \frac{1}{2\sqrt{A}}\,\frac{\wp' u + \wp' w}{\wp u + \wp w} =$$

$$= -\frac{B}{A} + \frac{1}{\sqrt{A}}\left\{\frac{\sigma'(u-w)}{\sigma(u-w)} - \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} + \frac{\sigma'(w)}{\sigma(w)}\right\} \tag{5}$$

Наиболее общее выражение x в функции u будет тогда

$$x = \varphi_0(u - u_0) \tag{6}$$

где u_0 обозначает произвольную постоянную $\left(\text{для } u = u_0,\ x = \infty \text{ и } \frac{1}{x^2}\frac{dx}{du} = \sqrt{A}\,.\right)$ Имеем

$$\begin{aligned} \varphi_0(-u + w) &= \varphi_0(u) \\ \varphi_0\left(u + \frac{w}{2}\right) &= \varphi_0\left(-u + \frac{w}{2}\right) \end{aligned} \tag{7}$$

и, следовательно, если положить

$$\varphi(u, w) = \varphi_0\left(u + \frac{w}{2}\right) =$$

$$= -\frac{B}{A} + \frac{1}{\sqrt{A}}\left\{\frac{\sigma'}{\sigma}\left(u - \frac{w}{2}\right) - \frac{\sigma'}{\sigma}\left(u + \frac{w}{2}\right) + \frac{\sigma'}{\sigma}[w]\right\} =$$

$$= -\frac{B}{A} + \frac{1}{\sqrt{A}}\left\{\frac{\wp'\left(\frac{w}{2}\right)}{\wp u - \wp\left(\frac{w}{2}\right)} + \frac{1}{2}\,\frac{\wp''\left(\frac{w}{2}\right)}{\wp'\left(\frac{w}{2}\right)}\right\} \tag{8}$$

то $\varphi(u, w)$ будет *четной* функцией u.

Уравнения (4) остаются неизменными, если прибавить к w какой-нибудь период функции $\wp(u)$. Следовательно, если мы обозначим через $(2\omega, 2\omega')$ какую-нибудь пару *основных* периодов функции $\wp(u)$ и если мы выберем произвольно одно

из бесчисленного множества значений w, удовлетворяющих уравнениям (4), то четыре выражения

$$\varphi(u, w), \quad \varphi(u, w+2\tilde{\omega}),$$
$$\varphi(u, w+2\tilde{\omega}+2\tilde{\omega}'), \quad \varphi(u, w+2\tilde{\omega}')$$

будут представлять *четыре различные четные функции* и которые все удовлетворяют дифференциальному уравнению (1), если их подставить вместо x. В самом деле, если 2Ω и $2\Omega'$ два каких-нибудь периода функции $\wp(u)$, то из уравнения (8) вытекает

$$\begin{aligned} \varphi(u, w+2\Omega) &= \varphi(u+\Omega, w) \\ \varphi(u, w+2\Omega') &= \varphi(u+\Omega', w) \end{aligned} \tag{9}$$

Для того чтобы уравнение

$$\varphi(u, w+2\Omega) = \varphi(u, w+2\Omega')$$

могло иметь место для всех значений u, нужно, следовательно, чтобы

$$\begin{aligned} \varphi(u+\Omega, w) &= \varphi(u+\Omega', w) \\ \varphi(u+\Omega'-\Omega, w) &= \varphi(u, w) \end{aligned} \tag{10}$$

т. е. $\Omega'-\Omega$ должно быть периодом функции $\varphi(u)$ и, следовательно [согласно последнему из уравнений (8)], $\Omega'-\Omega$ также должно быть периодом $\wp u$.

Если этого нет, то функции $\varphi(u, w+2\Omega)$ и $\varphi(u, w+2\Omega')$ не тождественны. Отсюда заключаем, что указанные выше четыре функции

$$\varphi(u, w), \quad \varphi(u, w+2\tilde{\omega}), \quad \varphi(u, w+2\tilde{\omega}+2\tilde{\omega}'), \quad \varphi(u, w+2\tilde{\omega}')$$

все различны между собой.

Но существуют всего четыре *четные* относительно u функции, которые, будучи подставлены вместо x, удовлетворяют дифференциальному уравнению (1); эти четыре функции отли-

чаются друг от друга тем, что для $u=0$ каждая из них становится равной одному из четырех корней уравнения

$$R(x)=0$$

Следовательно, эти четыре функции должны совпадать с четырьмя указанными выше четными функциями, и вследствие уравнений (9) их можно также написать таким образом:

$$\varphi(u,\ w),\quad \varphi(u+\tilde{\omega},\ w),\quad \varphi(u+\tilde{\omega}+\tilde{\omega}',\ w),\quad \varphi(u+\tilde{\omega}',\ w)$$

Если положим

$$\begin{aligned}
a_1&=\varphi(0,\ w)\\
a_1&=\varphi(\tilde{\omega},\ w)=\varphi(0,\ w+2\tilde{\omega}')\\
a_2&=\varphi(\tilde{\omega}+\tilde{\omega}',w)=\varphi(0,\ w+2\tilde{\omega}+2\tilde{\omega}')\\
a_3&=\varphi(\tilde{\omega}',\ w)=\varphi(0,\ w+2\tilde{\omega}')
\end{aligned}$$

то четыре числа a, a_1, a_2, a_3 представляют четыре различных корня уравнения $R(x)=0$, и мы будем иметь

$$a=-\frac{B}{A}+\frac{1}{2\sqrt{A}}\,\frac{\wp''\left(\frac{w}{2}\right)}{\wp'\left(\frac{w}{2}\right)}$$

$$a_2=-\frac{B}{A}+\frac{1}{2\sqrt{A}}\,\frac{\wp''\left(\frac{w}{2}+\tilde{\omega}+\tilde{\omega}'\right)}{\wp'\left(\frac{w}{2}+\tilde{\omega}+\tilde{\omega}'\right)}$$

$$a_1=-\frac{B}{A}+\frac{1}{2\sqrt{A}}\,\frac{\wp''\left(\frac{w}{2}+\tilde{\omega}\right)}{\wp'\left(\frac{w}{2}+\tilde{\omega}\right)}$$

$$a_3=-\frac{B}{A}+\frac{1}{2\sqrt{A}}\,\frac{\wp''\left(\frac{w}{2}+\tilde{\omega}'\right)}{\wp'\left(\frac{w}{2}+\tilde{\omega}'\right)}$$

Если положить $\wp(\tilde{\omega})=e_1$, $\wp(\tilde{\omega}+\tilde{\omega}')=e_2$, $\wp(\tilde{\omega}')=e_3$, то для каждого значения аргумента u будут иметь место следующие соотношения*:

$$\wp\left(\frac{u}{2}\right)=-\frac{(e_2{}^2-e_3{}^2)\,\sigma_1 u+(e_3{}^2-e_1{}^2)\,\sigma_2 u+(e_1{}^2-e_2{}^2)\,\sigma_3 u}{(e_2-e_3)\,\sigma_1 u+(e_3-e_1)\,\sigma_2 u+(e_1-e_2)\,\sigma_3 u}$$

$$\wp'\left(\frac{u}{2}\right)=\frac{-2\,(e_2-e_3)\,(e_3-e_1)\,(e_1-e_2)\,\sigma u}{(e_2-e_3)\,\sigma_1 u+(e_3-e_1)\,\sigma_2 u+(e_1-e_2)\,\sigma_2 u} \qquad (11)$$

$$\frac{\wp''\left(\frac{u}{2}\right)}{\wp'\left(\frac{u}{2}\right)}=-2\,\frac{(e_2-e_3)\,\sigma_2 u\sigma_3 u+(e_3-e_1)\,\sigma_3 u\sigma_1 u+(e_1-e_2)\,\sigma_1 u\sigma_2 u}{\sigma u\,[(e_2-e_3)\,\sigma_1 u+(e_3-e_1)\,\sigma_2 u+(e_1-e_2)\,\sigma_3 u]}=$$

$$=-2\,\frac{\sigma_1 u+\sigma_2 u+\sigma_3 u}{\sigma u}$$

Кроме того, имеем

$$\frac{\sigma_1(w)}{\sigma(v)}=\sqrt{\frac{D}{A}-e_1}$$

$$\frac{\sigma_2(w)}{\sigma(w)}=\sqrt{\frac{D}{A}-e_2}$$

$$\frac{\sigma_3(w)}{\sigma(v)}=\sqrt{\frac{D}{A}-e_3}$$

Для каждого определенного значения w соответствующие знаки квадратных корней в этих формулах также являются вполне определенными, так что будем иметь

$$\sqrt{\frac{D}{A}-e_1}\,\sqrt{\frac{D}{A}-e_2}\,\sqrt{\frac{D}{A}-e_3}=-\frac{1}{2}\,\wp'(w)=\frac{E}{2A\sqrt{A}}$$

---

* См. Schwarz, Formeln und Lehrsätze.

На основании этих формул таким образом имеем

$$-\wp\left(\frac{w}{2}\right)= \tag{12}$$

$$=\frac{(e_2^2-e_3^2)\sqrt{\frac{D}{A}-e_1}+(e_3^2-e_1^2)\sqrt{\frac{D}{A}-e_2}+(e_1^2-e_2^2)\sqrt{\frac{D}{A}-e_3}}{(e_2-e_3)\sqrt{\frac{D}{A}-e_1}+(e_3-e_1)\sqrt{\frac{D}{A}-e_2}+(e_1-e_2)\sqrt{\frac{D}{A}-e_3}}$$

$$\wp'\left(\frac{w}{2}\right)=$$

$$=\frac{-2(e_2-e_3)(e_3-e_1)(e_1-e_2)}{(e_2-e_3)\sqrt{\frac{D}{A}-e_1}+(e_3-e_1)\sqrt{\frac{D}{A}-e_2}+(e_1-e_2)\sqrt{\frac{D}{A}-e_3}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{A}}\,\frac{\wp''\left(\frac{w}{2}\right)}{\wp'\left(\frac{w}{2}\right)}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{A}}\left\{\sqrt{\frac{D}{A}-e_1}+\sqrt{\frac{D}{A}-e_2}+\sqrt{\frac{D}{A}-e_3}\right\}$$

Следовательно, корень a уравнения $R(x)=0$, соответствующий выбранному нами частному значению w, дается формулой

$$a=-\frac{1}{\sqrt{A}}\,\frac{\sigma_1(w)+\sigma_2(w)+\sigma_3(w)}{\sigma(w)}-\frac{B}{A}=$$

$$=-\frac{B}{A}-\frac{1}{\sqrt{A}}\left\{\sqrt{\frac{D}{A}-e_1}+\sqrt{\frac{D}{A}-e_2}+\sqrt{\frac{D}{A}-e_3}\right\}$$

Если положим

$$h_0 = \frac{\sigma_1(w) + \sigma_2(w) + \sigma_3(w)}{\sigma(w)} = \tag{13}$$

$$= \sqrt{\frac{D}{A} - e_1} + \sqrt{\frac{D}{A} - e_2} + \sqrt{\frac{D}{A} - e_3}$$

$$h_1 = \frac{(e_2 - e_3)\sigma_1(w) + (e_3 - e_1)\sigma_2(w) + (e_1 - e_2)\sigma_3(w)}{\sigma(w)} =$$

$$= (e_2 - e_3)\sqrt{\frac{D}{A} - e_1} + (e_3 - e_1)\sqrt{\frac{D}{A} - e_2} +$$

$$+ (e_1 - e_2)\sqrt{\frac{D}{A} - e_3}$$

$$h_2 = \frac{(e_2^2 - e_2^3)\sigma_1(w) + (e_3^2 - e_1^2)\sigma_2(w) + (e_1^2 - e_2^2)\sigma_3(w)}{\sigma(w)} =$$

$$= (e_2^2 - e_3^2)\sqrt{\frac{D}{A} - e_1} + (e_3^2 - e_1^2)\sqrt{\frac{D}{A} - e_2} +$$

$$+ (e_1^2 - e_2^2)\sqrt{\frac{D}{A} - e_3}$$

то будем иметь

$$a = -\frac{B}{A} - \frac{h_0}{\sqrt{A}}$$

$$\varphi(u, w) = -\frac{B}{A} - \frac{h_0}{\sqrt{A}} - \frac{2}{\sqrt{A}} \frac{(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)(e_1 - e_2)}{h_1 \wp u + h_2}$$

Полагая

$$\tilde{\omega} = \omega_1$$

$$\tilde{\omega} + \tilde{\omega}' = \omega_2$$

$$\tilde{\omega}' = \omega_3$$

и обозначая через λ, μ, ν числа 1, 2, 3, взятые в каком-

нибудь порядке, имеем формулы

$$\frac{\sigma_\lambda(u+2\omega_\lambda)}{\sigma(u+2\omega_\lambda)}=\frac{\sigma_\lambda u}{\sigma u}$$

$$\frac{\sigma_\lambda(u+2\omega_\mu)}{\sigma(u+2\omega_\mu)}=-\frac{\sigma_\mu u}{\sigma u}$$

$$\frac{\sigma_\lambda(u+2\omega_\nu)}{\sigma(u+2\omega_\nu)}=-\frac{\sigma_\nu u}{\sigma u}$$

Следовательно, подставляя в предыдущие формулы $w+2\omega_1$, $w+2\omega_2$, $w+2\omega_3$ вместо w и полагая

$$h_0'=\frac{\sigma_1(w)-\sigma_2(w)-\sigma_3(w)}{\sigma(w)}$$

$$h_1'=\frac{(e_2-e_3)\sigma_1(w)-(e_3-e_1)\sigma_2(w)-(e_1-e_2)\sigma_3(w)}{\sigma(w)}$$

$$h_2'=\frac{(e_2^2-e_3^2)\sigma_1(w)-(e_3^2-e_1^2)\sigma_2(w)-(e_1^2-e_2^2)\sigma_3(w)}{\sigma(w)}$$

$$h_0''=\frac{-\sigma_1(w)+\sigma_2(w)-\sigma_3(w)}{\sigma(w)}$$

$$h_1''=\frac{-(e_2-e_3)\sigma_1(x)+(e_3-e_1)\sigma_2(w)-(e_1-e_2)\sigma_3(w)}{\sigma(w)} \qquad (14)$$

$$h_2''=\frac{-(e_2^2-e_3^2)\sigma_1(w)+(e_3^2-e_1^2)\sigma_2(w)-(e_1^2-e_2^2)\sigma_3(w)}{\sigma(w)}$$

$$h_0'''=\frac{-\sigma_1(w)-\sigma_2(w)+\sigma_3(w)}{\sigma(w)}$$

$$h_1'''=\frac{-(e_2-e_3)\sigma_1(w)-(e_3-e_1)\sigma_2(w)+(e_1-e_2)\sigma_3(w)}{\sigma(w)}$$

$$h_2'''=\frac{-(e_2^2-e_3^2)\sigma_1(w)-(e_3^2-e_1^2)\sigma_2(w)+(e_1^2-e_2^2)\sigma_3(w)}{\sigma(w)}$$

получим следующие формулы:

$$a = -\frac{B}{A} - \frac{h_0}{\sqrt{A}}$$

$$\varphi(u, w) = -\frac{B}{A} - \frac{h_0}{\sqrt{A}} - \frac{2}{\sqrt{A}} \frac{(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)(e_1 - e_2)}{h_1 \wp u + h_2}$$

$$a_1 = -\frac{B}{A} \frac{h_0'}{\sqrt{A}}$$

$$\varphi(u + \omega_1, w) = -\frac{B}{A} - \frac{h_0'}{\sqrt{A}} - \frac{2}{\sqrt{A}} \frac{(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)(e_1 - e_2)}{h_1' \wp u + h_2'}$$

$$a_2 = -\frac{B}{A} - \frac{h_0''}{\sqrt{A}} \tag{15}$$

$$\varphi(u + \omega_2, w) = -\frac{B}{A} - \frac{h_0''}{\sqrt{A}} - \frac{2}{\sqrt{A}} \frac{(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)(e_1 - e_2)}{h_1'' \wp u + h_2''}$$

$$a_3 = -\frac{B}{A} - \frac{h_0'''}{\sqrt{A}}$$

$$\varphi(u + \omega_3, w) = -\frac{B}{A} - \frac{h_0'''}{\sqrt{A}} - \frac{2}{\sqrt{A}} \frac{(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)(e_1 - e_2)}{h_1''' \wp u + h_2'''}$$

Таким образом, получаем четыре *четные* функции u, удовлетворяющие дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{du} = \sqrt{R(x)}$$

так же как соответствующие корни уравнения $R(x) = 0$, т. е. значения, которые принимает каждая из этих функций при $u = 0$, выраженные через рациональные функции следующих выражений:

$$\frac{B}{A}, \quad \frac{1}{\sqrt{A}}$$

$$\frac{\sigma_1(w)}{\sigma(w)} = \sqrt{\frac{D}{A} - e_1}, \quad \frac{\sigma_2(w)}{\sigma(w)} = \sqrt{\frac{D}{A} - e_2}, \quad \frac{\sigma_3(w)}{\sigma(w)} = \sqrt{\frac{D}{A} - e_3}.$$

До сих пор мы не подчиняли постоянные A, B, C, B', A_1 [коэффициенты $R(x)$] никаким условиям; предположим теперь, что эти коэффициенты вещественны. В этом случае всегда имеются вещественные положительные значения u, удовлетворяющие уравнению $\wp'(u)=0$; обозначим через ω наименьшее из всех этих значений. Точно так же уравнение $\overline{\wp'}(u)=0$ может быть удовлетворено вещественными положительными значениями u; мы обозначим через $\tilde{\omega}$ наименьшее из последних. Теперь следует различать два случая.

I. Выражение $g_2^3-27g_3^2$ *положительно.*

Положим в этом случае

$$\omega_1=\omega, \qquad \omega_2=\omega+\tilde{\omega}i, \qquad \omega_3=\tilde{\omega}i$$
$$\wp(\omega_1)=e_1, \quad \wp(\omega_2)=e_2, \qquad \wp(\omega_3)=e_3$$

Величины e_1, e_2, e_3, представляющие корни уравнения

$$4s^3-g_2s-g_3=0$$

в этом случае все вещественны, причем

$$e_1>e_2>e_3$$

а $(2\omega_1, 2\omega_3)$ есть пара основных периодов функции $\wp(u)$.

II. Выражение $g_2^3-27g_3^2$ *отрицательно.*

Положим в этом случае

$$\omega_1=\frac{\omega-\tilde{\omega}i}{2}, \qquad \omega_2=\omega, \qquad \omega_3=\frac{\omega+\tilde{\omega}i}{2}$$
$$\wp(\omega_1)=e_1, \qquad \wp(\omega_2)=e_2, \qquad \wp(\omega_3)=e_3$$

В этом случае $(2\omega_1, 2\omega_3)$ также представляют пару основных периодов функции $\wp(u)$, но e_1 и e_3 в этом случае суть величины комплексные сопряженные, в то время как $e_2=-(e_1+e_3)$ вещественно. Величина $\frac{e_1-e_3}{i}$ положительна.

Если мы условимся давать $\sqrt{A}$ положительное значение, когда A положительно, и обозначать этим корнем произведение i на положительную величину, когда A отрицательно, то можно в обоих случаях определить следующим образом величину w, удовлетворяющую уравнениям

$$\wp(w)=\frac{D}{A}, \qquad \wp'(w)=-\frac{E}{A\sqrt{A}}$$

Уравнения

$$\frac{E^2}{A^3}=\wp'(w)^2=4\left(\frac{D}{A}-e_1\right)\left(\frac{D}{A}-e_2\right)\left(\frac{D}{A}-e_3\right)$$

показывают, что в случае I, если $A>0$, то

$$\frac{D}{A}$$

должно содержаться или в интервале $(e_1 \ldots \infty)$, или в интервале $(e_3 \ldots e_2)$; если $A<0$, то

$$\frac{D}{A}$$

будет принадлежать или интервалу $(-\infty \ldots e_3)$, или интервалу $(e_2 \ldots e_1)$.

В случае II, напротив,

$$\frac{D}{A}$$

должно содержаться или в интервале $(e_2 \ldots \infty)$, или в интервале $(-\infty \ldots e_2)$.

Обозначим через $(a \ldots b)$ величину, содержащуюся в вещественном интервале $(a \ldots b)$, через $(+)$ и $(-)$ соответственно положительные или отрицательные величины и через ε вещественное число, удовлетворяющее условию

$$0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$$

В случае I имеем

1) $\wp(2\varepsilon\omega) = (\infty \ldots e_1)$

$$\wp'(2\varepsilon\omega) = \begin{cases} (-), & \text{если } \varepsilon < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{„ } \varepsilon = \frac{1}{2} \\ (+), & \text{„ } \varepsilon > \frac{1}{2} \end{cases}$$

2) $\wp(\omega + 2\varepsilon\tilde{\omega}i) = (e_1 \ldots e_2)$

$$\wp'(\omega + 2\varepsilon\tilde{\omega}i) = \begin{cases} (+)i, & \text{если } \varepsilon < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{„ } \varepsilon = \frac{1}{2} \\ (-)i, & \text{„ } \varepsilon > \frac{1}{2} \end{cases}$$

3) $\wp(2\varepsilon\omega + \tilde{\omega}i) = (e_3 \ldots e_2)$

$$\wp'(2\varepsilon\omega + \tilde{\omega}i) = \begin{cases} (+), & \text{если } \varepsilon < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{„ } \varepsilon = \frac{1}{2} \\ (-), & \text{„ } \varepsilon > \frac{1}{2} \end{cases}$$

4) $\wp(2\varepsilon\tilde{\omega}i) = (-\infty \ldots e_3)$

$$\wp'(2\varepsilon\tilde{\omega}i) = \begin{cases} (-)\,i, & \text{если } \varepsilon < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{„ } \varepsilon = \frac{1}{2} \\ (+), & \text{„ } \varepsilon > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Если заставить ε непрерывно возрастать от 0 до 1/2, то в каждом из этих четырех случаев функция $\wp(u)$ пробегает весь указанный интервал, непрерывно возрастая в 3-м и 4-м случаях и убывая в 1-м и 2-м. Если затем изменять ε от 1/2 до 1, то $\wp(u)$ пробегает в каждом случае тот же интервал, что и раньше, но в противоположном направлении. Двум значениям ε, равноотстоящим от 1/2, соответствуют одни и те же значения $\wp(u)$, но противоположные по знаку значения $\wp'(u)$.

В случае II имеем

5) $\wp(2\varepsilon\omega) = (+\infty \ldots e_2)$

$$\wp'(2\varepsilon\omega) = \begin{cases} (-), & \text{если } \varepsilon < \frac{1}{2} \\ 0, & \quad " \quad \varepsilon = \frac{1}{2} \\ (+), & \quad " \quad \varepsilon > \frac{1}{2} \end{cases}$$

6) $\wp(2\varepsilon\tilde{\omega}i) = (-\infty \ldots e_2)$,

$$\wp'(2\varepsilon\tilde{\omega}i) = \begin{cases} (-), & \text{если } \varepsilon < \frac{1}{2} \\ 0, & \quad " \quad \varepsilon = \frac{1}{2} \\ (+), & \quad " \quad \varepsilon > \frac{1}{2} \end{cases}$$

По этим формулам можно определить значение ω, удовлетворяющее уравнениям

$$\wp(w) = \frac{D}{A}, \qquad \wp'(w) = -\frac{E}{A\sqrt{A}}$$

следующим образом.

I. $g_2^3 - 27g_3^2$ *положительно.*

1) Если A положительно и $\frac{D}{A}$ принадлежит интервалу $(+\infty \ldots e_1)$, то можно положить

$$w = 2\varepsilon\omega \qquad (0 < \varepsilon < 1)$$

замечая, что

$$\varepsilon \gtrless \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad E \gtrless 0$$

2) Если A отрицательно и $\frac{D}{A}$ находится в интервале $(-\infty \ldots e_3)$, то можно положить

$$w = 2\varepsilon\tilde{\omega}i \qquad (0 < \varepsilon < 1)$$

и

$$\varepsilon \geqslant \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad E \gtrless 0$$

3) Если A положительно, но $\frac{D}{A}$ находится в интервале $(e_3 \ldots e_2)$, то можно положить

$$w = 2\varepsilon\omega + \tilde{\omega}i \qquad (0 \leqslant \varepsilon < 1)$$

и

$$\varepsilon \gtrless \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad E \gtrless 0$$

4) Если A отрицательно и $\frac{D}{A}$ принадлежит интервалу $(e_1 \ldots e_2)$, то можно положить

$$w = \omega + 2\varepsilon\tilde{\omega}i \qquad (0 < \varepsilon < 1)$$

и

$$\varepsilon \gtrless \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad E \gtrless 0$$

II. $g_2^3 - 27 g_3^2$ *есть величина отрицательная.*

5) Если A положительно, то $\frac{D}{A}$ принадлежит интервалу $(e_2 \ldots \infty)$ и можно положить.

$$w = 2\varepsilon\omega \qquad (0 \leqslant \varepsilon < 1)$$

$$\varepsilon \gtrless \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad E \gtrless 0$$

6) Если A отрицательно, то $\frac{D}{A}$ находится в интервале $(-\infty \ldots e_2)$ и можно положить

$$w = 2\varepsilon\bar{\omega} i \qquad (0 < \varepsilon < 1)$$

$$\varepsilon \gtrless \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad E \gtrless 0$$

Случаи 1) и 2) представляются тогда, когда все четыре корня уравнения $R(x) = 0$ вещественны.

Случаи 3) и 4) имеют место, если все эти корни комплексные.

Наконец, имеем случаи 5) и 6), когда два корня вещественны, а два других комплексные сопряженные.

В случае 1) все выражения

$$\frac{D}{A} - e_1, \quad \frac{D}{A} - e_2, \quad \frac{D}{A} - e_3$$

вещественны и положительны, в случае 2) они вещественны и отрицательны; следовательно, на основании уравнений (14) выражения

$$\frac{h_0}{\sqrt{A}}, \quad \frac{h_0'}{\sqrt{A}}, \quad \frac{h_0''}{\sqrt{A}}, \quad \frac{h_0'''}{\sqrt{A}}$$

в обоих случаях вещественны.

В случае 3) выражения

$$\frac{D}{A} - e_1, \quad \frac{D}{A} - e_2$$

отрицательны, в то время как

$$\frac{D}{A} - e_3$$

положительно. Следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{A}}\sqrt{\frac{D}{A} - e_1} \text{ и } \frac{1}{\sqrt{A}}\sqrt{\frac{D}{A} - e_2}$$

являются комплексными, в то время как

$$\frac{1}{\sqrt{A}}\sqrt{\frac{D}{A} - e_3}$$

вещественно. Следовательно, выражения

$$\frac{h_0}{\sqrt{A}}, \quad \frac{h_0'}{\sqrt{A}}, \quad \frac{h_0''}{\sqrt{A}}, \quad \frac{h_0'''}{\sqrt{A}}$$

являются комплексными величинами. Величины a и a_3, так же как a_1 и a_2, в этом случае комплексные сопряженные.

В случае 4) величины

$$\frac{D}{A} - e_2, \quad \frac{D}{A} - e_3$$

положительны, в то время как

$$\frac{D}{A} - e_1$$

отрицательно. Следовательно, $\frac{1}{\sqrt{A}}\sqrt{\frac{D}{A} - e_1}$ вещественна, а

$$\frac{1}{\sqrt{A}}\sqrt{\frac{D}{A} - e_2}, \quad \frac{1}{\sqrt{A}}\sqrt{\frac{D}{A} - e_3}$$

комплексные. Величины

$$\frac{h_0}{\sqrt{A}}, \quad \frac{h_0'}{\sqrt{A}}, \quad \frac{h_0''}{\sqrt{A}}, \quad \frac{h_0'''}{\sqrt{A}}$$

комплексные. Корни a и a_1, а также a_2 и a_3 являются вели-

чинами сопряженными. В случае 5) величина $\frac{D}{A} - e_2$ положительна, $\frac{D}{A} - e_1$, $\frac{D}{A} - e_3$ комплексные сопряженные. Функции

$$\frac{\sigma_1 u}{\sigma u}, \quad \frac{\sigma_3 u}{\sigma u}$$

для всех вещественных значений u принимают комплексные сопряженные значения, так что если u и u' комплексные сопряженные, то соответствующие значения

$$\frac{\sigma_1 u}{\sigma u}, \quad \frac{\sigma_3 u'}{\sigma u'}$$

также комплексные сопряженные.

В случае 5), так же как и в случае 6), выражения

$$\frac{1}{\sqrt{A}} \frac{\sigma_1 w}{\sigma w}, \quad \frac{1}{\sqrt{A}} \frac{\sigma_3 w}{\sigma w}$$

являются комплексными сопряженными, в то время как

$$\frac{1}{\sqrt{A}} \frac{\sigma_2 w}{\sigma w}$$

есть величина вещественная.

Следовательно, величины a и a_2 вещественны в случаях 5) и 6), но a_1 и a_3 комплексные сопряженные.

Из предыдущего исследования вытекает, таким образом, что для вещественных значений u все функции

$$\varphi(u, w), \quad \varphi(u + \omega_1, w), \quad \varphi(u + \omega_2, w), \quad \varphi(u + \omega_3, w)$$

вещественны в случаях 1) и 2) и комплексны в случаях 3) и 4). Следует заметить, что в случае 3) первая и третья, так же как вторая и четвертая из этих функций, комплексные сопряженные; наоборот, в случае 4) сопряжены первая и вторая, а также третья и четвертая.

В случаях 5) и 6) первая и третья из этих функций вещественны, в то время как вторая и четвертая комплексные сопряженные.

§ 4

Для того чтобы можно было применить формулы предыдущего параграфа к занимающему нас случаю, нужно начать с рассмотрения корней уравнения

$$R(x) = -x^4 + 6l_1x^2 + 4c_0lx + c_0^2 - k^2 = 0$$

Положим

$$k_0 = c_0^2 - k^2,$$

$$l_0 = c_0 l$$

В общем случае, если

$$R(x) = Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4B'x + A'$$

и если положить

$$g_2 = AA' - 4BB' + 3C^2$$

$$g_3 = ACA' + 2BCB' - AB'^2 - A'B^2 - C^3$$

условие вещественности корней уравнения $R(x) = 0$ может быть выражено следующим образом.

Если $G = g_2^3 - 27g_3^2 < 0$, то уравнение $R(x) = 0$ имеет два вещественных корня и два комплексных сопряженных.

Если $G = g_2^3 - 27g_3^2 > 0$, то все четыре корня или одновременно вещественны, или комплексны и попарно сопряжены. Первый случай имеет место, если имеем, кроме того,

$$B^2 - AC > 0,$$

$$12(B^2 - AC)^2 - A^2g_2 > 0$$

Но если при положительном $g_2^3 - 27g_3^2$ одно из этих последних выражений отрицательно, то все четыре корня уравнения $R(x) = 0$ комплексны.

Применим это к нашему случаю. Будем иметь

$$A = -1, \quad B = 0, \quad C = l_1, \quad B' = lc_0 = l_0, \quad A' = c_0^2 - k^2 = k_0$$

$$g_2 = -k_0 + 3l_1^2$$

$$g_3 = -l_1(k_0 + l_1^2) + l_0^2$$

$$B^2 - AC = l_1, \quad 12(B^2 - AC)^2 - A^2 g_2 = k_0 + 9l_1^2$$

$$g_2^3 - 27g_3^2 = (-k_0 + 3l_1^2)^3 - 27[-l_1(k_0 + l_1^2) + l_0^2]^2 =$$
$$= -27\left\{l_0^4 - 2l_1(k_0 + l_1^2)\,l_0^2 + \frac{1}{27}k_0(k_0 + 9l_1^2)^2\right\}$$

На основании тождества

$$l_1^2(k_0 + l_1^2)^2 = \frac{1}{27}k_0(k_0 + 9l_1^2)^2 + \left(\frac{-k_0 + 3l_1^2}{3}\right)^3$$

корни квадратного относительно l_0^2 уравнения

$$Q(l_0^2) = l_0^4 - 2l_1(k_0 + l_1^2)\,l_0^2 + \frac{1}{27}k_0(k_0 + 9l_1^2)^2$$

могут быть написаны так:

$$l_0'^2 = l_1(k_0 + l_1^2) + \left(\frac{-k_0 + 3l_1^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$l_0''^2 = l_1(k_0 + l_1^2) - \left(\frac{-k_0 + 3l_1^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

этих формулах мы будем считать радикал

$$\left(\frac{-k_0 + 3l_1^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

положительным, если он вещественен.

Применяя эти формулы к изучению корней уравнения $R(x) = 0$, видим, что следует различать такие случаи:

$$1^\circ. \qquad l_1 > 0, \quad k_0 > 0, \quad -k_0 + 3l_1^2 < 0$$

В этом случае $l_0'^2$ и $l_0''^2$ оба комплексны. Следовательно, $G=-27Q(l_0^2)$ отрицательно для всех вещественных значений l_0 и уравнение $R(x)=0$ имеет два вещественных и два комплексных корня.

$$2^\circ.\quad l_1>0,\quad k_0>0,\quad -k_0+3l_1^2>0$$

Здесь $l_0'^2$ и $l_0''^2$ оба положительны и $l_1'^2>l_0''^2$. Тогда если

$$l_0^2>l_0'^2 \quad \text{или} \quad l_0''^2>l_0^2$$

то $G<0$ и уравнение $R(x)=0$ имеет еще два вещественных и два комплексных корня. Если, напротив,

$$l_0'^2>l_0^2>l_0''^2$$

то G положительно, и так как имеем также $k_0+9l_1^2>0$, $l_1>0$, то четыре корня уравнения $R(x)=0$ вещественны.

$$3^\circ.\quad l_0>0,\quad k_0<0,\quad k_0+9l_1^2>0$$

Корень $l_0'^2$ положителен, другой $l_0''^2$ отрицателен. Величина

$$G=-27Q(l_0^2)$$

отрицательна, если $l_0^2>l_0'^2$, и в этом случае уравнение $R(x)=0$ имеет четыре вещественных корня. Если, напротив, $l_0^2<l_0'^2$, то G положительно и предположенное уравнение имеет только два вещественных корня.

$$4^\circ.\quad l_1>0,\quad k_0<0,\quad k_0+9l_1^2<0$$

Как и в предыдущем случае, G положительно для $l_0^2<l_0'^2$ и отрицательно для $l_0^2>l_0'^2$. Если оно отрицательно, то уравнение $R(x)=0$ имеет в этом случае четыре комплексных корня; если оно положительно, то имеются два вещественных и два комплексных корня.

$$5^\circ.\quad l_1<0,\quad k_0>0$$

Так как $l_0'^2$ и $l_0''^2$ отрицательны или комплексны, то выражение $G=-27Q(l_0^2)$ остается отрицательным для всех вещественных значений l_0; уравнение $R(x)=0$ имеет, следовательно, два корня вещественных и два комплексных.

$$6^\circ.\quad l_1<0,\quad k_0<0$$

Этот случай совершенно соответствует четвертому.

Резюме

Уравнение $R(x)=0$ имеет четыре вещественных корня в двух следующих случаях:

1) $l_1>0, \quad k_0>0, \quad -k_0+3l_1^2>0, \quad l_0'^2>l_0^2>l_0''^2$

где

$$l_0'^2=l_1(k_0+l_1^2)+\left(\frac{-k_0+3l_1^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$l_0''^2=l_1(k_0+l_1^2)-\left(\frac{-k_0+3l_1^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

2) $l_1>0, \quad k_0<0, \quad k_0+9l_1^2>0, \quad l_0^2<l_0'^2$

Четыре корня уравнения $R(x)=0$ комплексны в двух следующих случаях:

1) $l_1>0, \quad k_0<0, \quad k_0+9l_1^2<0, \quad l_0^2<l_0'^2$

2) $l_1<0, \quad k_0<0, \quad l_0^2<l_0'^2$

Наконец, уравнение $R(x)=0$ имеет два вещественных корня в следующих случаях:

1) $l_1>0$, $k_0>0$, $-k_0+3l_1^2<0$ для всех значений l_0;

2) $l_1>0$, $k_0>0$, $-k_0+3l_1^2>0$, $l_0^2>l_0'^2$ или $l_0^2<l_0''^2$;

3) $l_1>0$, $k_0<0$, $k_0+9l_1^2>0$, $l_0^2>l_0'^2$

4) $l_1>0$, $k_0<0$, $k_0+9l_1^2<0$, $l_0^2>l_0'^2$

5) $l_1<0$, $k_0>0$ (для всех значений l_0)

6) $l_1<0$, $k_0<0$, $l_0^2<l_0'^2$

§ 5

Я рассмотрю более подробно случай, когда все корни уравнения

$$R(x) = -x^4 + 6l_1x^2 + 4lc_0x + c_0^2 - k^2 = 0$$

вещественны.

Пользуясь теми же обозначениями, что и в § 3, имеем в этом случае

$$\wp(w) = \frac{D}{A} = -l_1, \qquad \wp'(w)^2 = 4s^3 - g_2s - g_3 = -l_0^2$$

где w — чисто мнимое, e_1, e_2, e_3 — вещественны, причем

$$e_1 > e_2 > e_3 > -l_1$$

Выражения

$$\frac{\sigma_1}{\sigma}(w) = \sqrt{-(l_1 + e_1)}$$

$$\frac{\sigma_2}{\sigma}(w) = \sqrt{-(l_1 + e_2)}$$

$$\frac{\sigma_3}{\sigma}(w) = \sqrt{-(l_1 + e_3)}$$

все чисто мнимые, и таковы же величины

$$h_0 = \frac{\sigma_1}{\sigma}(w) + \frac{\sigma_2}{\sigma}(w) + \frac{\sigma_3}{\sigma}(w)$$

$$h_1 = (e_2 - e_3)\frac{\sigma_1}{\sigma}(w) + (e_3 - e_1)\frac{\sigma_2}{\sigma}(w) + (e_1 - e_2)\frac{\sigma_3}{\sigma}(w)$$

$$h_2 = (e_2^2 - e_3^2)\frac{\sigma_1}{\sigma}(w) + (e_3^2 - e_1^2)\frac{\sigma_2}{\sigma}(w) + (e_1^2 - e_2^2)\frac{\sigma_3}{\sigma}(w)$$

Так как коэффициент при x^4 в $R(x)$ равен -1, то обозначая через E произведение $(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)(e_1 - e_2)$, мы положим в этом случае

$$p + qi = x_1 = \varphi(u_1) = i\left(h_0 + \frac{2E}{h_1\wp u_1 + h_2}\right)$$

$$p - qi = x_2 = \varphi(u_2) = i\left(h_0 + \frac{2E}{h_1\wp u_2 + h_2}\right)$$

откуда видим, что x_1 и x_2 комплексные сопряженные, если такими являются u_1 и u_2. Положим

$$u_1 = \frac{u + vi}{2}, \qquad u_2 = \frac{u - vi}{2}$$

где u и v вещественны.

Тогда имеем

$$s_1 = \wp(u_1 + u_2) = \wp(u)$$
$$s_2 = \wp(u_1 - u_2) = \wp(vi)$$

Из этих формул следует, что величины s_1 и s_2 вещественны и заключаются между следующими пределами:

$$(\infty \ldots s_1 \ldots e_1), \qquad (e_3 \ldots s_2 \ldots -\infty)$$

Для того чтобы выразить величины p и q через s_1 и s_2, я воспользуюсь следующими формулами.

На стр. 50 цитированной работы г. Шварца находим следующие формулы:

$$\sigma_\lambda(w)\,\sigma(u+v+w)\,\sigma(u-v) = \sigma(u+w)\,\sigma(u)\,\sigma_\lambda(v+w)\,\sigma_\lambda(v) - \\ - \sigma_\lambda(u+w)\,\sigma_\lambda(u)\,\sigma(v+w)\,\sigma(v)$$

$$\sigma_\lambda(w)\,\sigma_\lambda(u+v+w)\,\sigma_\lambda(u-v) = \sigma_\lambda(u+w)\,\sigma_\lambda(u)\,\sigma_\lambda(v+w)\,\sigma_\lambda(v) - \\ - (e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)\,\sigma(u+w)\,\sigma(u)\,\sigma(v+w)\,\sigma(v)$$

Полагая в этих формулах $w=0$ и давая λ последовательно значения 1, 2, 3, находим

$$\sigma(u+v)\,\sigma(u-v) = \sigma^2 u\,\sigma_1^2 v - \sigma_1^2 u\,\sigma^2 v$$

$$\sigma_1(u+v)\,\sigma_1(u-v) = \sigma_1^2 u\,\sigma_1^2 v - (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)\,\sigma^2 u\,\sigma^2 v$$

$$\sigma_2(u+v)\,\sigma_2(u-v) = \sigma_2^2 u\,\sigma_2^2 v + (e_1 - e_2)(e_2 - e_3)\,\sigma^2 u\,\sigma^2 v$$

$$\sigma_3(u+v)\,\sigma_3(u-v) = \sigma_3^2 u\,\sigma_3^2 v - (e_1 - e_3)(e_2 - e_3)\,\sigma^2 u\,\sigma^2 v$$

или, замечая, что

$$\sigma_2^2 u = \sigma_1^2 u + (e_1 - e_2)\sigma^2 u$$

$$\sigma_3^2 u = \sigma_1^2 u + (e_1 - e_3)\sigma^2 u$$

получим .

$$\sigma_2(u+v)\sigma_2(u-v) = \sigma_1^2 u\,\sigma_1^2 v + (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)\sigma^2 u\,\sigma^2 v + \\ + (e_1 - e_2)(\sigma^2 u\,\sigma_1^2 v + \sigma_1^2 u\,\sigma^2 v)$$

$$\sigma_3(u+v)\sigma_3(u-v) = \sigma_1^2 u\,\sigma_1^2 v + (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)\sigma^2 u\,\sigma^2 v + \\ + (e_1 - e_3)(\sigma^2 u\,\sigma_1^2 v + \sigma_1^2 u\,\sigma^2 v)$$

Из этих формул следует

$$2(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)(e_1 - e_2)\sigma^2 u\sigma^2 v = (e_2 - e_3)\sigma_1(u+v)\sigma_1(u-v) + \\ + (e_3 - e_1)\sigma_2(u+v)\sigma_2(u-v) + \\ + (e_1 - e_2)\sigma_3(u+v)\sigma_3(u-v)$$

$$2(e_2 - e_3)\sigma_1^2 u\,\sigma_1^2 v = (e_2 - e_3)\sigma_1(u+v)\sigma_1(u-v) - \\ - (e_3 - e_1)\sigma_2(u+v)\sigma_2(u-v) - \\ - (e_1 - e_2)\sigma_3(u+v)\sigma_3(u-v)$$

$$2(e_2 - e_3)\sigma^2 u\sigma_1^2 v = (e_2 - e_3)\sigma(u+v)\sigma(u-v) - \\ - \sigma_2(u+v)\sigma_2(u-v) + \\ + \sigma_3(u+v)\sigma_3(u-v)$$

$$2(e_2 - e_3)\sigma_1^2 u\,\sigma^2 v = -(e_2 - e_3)\sigma(u+v)\sigma(u-v) - \\ - \sigma_2(u+v)\sigma_2(u-v) + \\ + \sigma_3(u+v)\sigma_3(u-v)$$

откуда получаем путем деления

$$\frac{\sigma_1^2 u}{\sigma^2 u}=(e_1-e_2)(e_1-e_3)\frac{(e_2-e_3)\sigma'\sigma'+\sigma_2'\sigma_2''-\sigma_3'\sigma_3''}{(e_2-e_3)\sigma_1'\sigma_1''+(e_3-e_1)\sigma_2'\sigma_2''+(e_1-e_2)\sigma_3'\sigma_3''}$$

и, так как $\wp u=\frac{\sigma_1^2 u}{\sigma^2 u}+e_1$, следовательно,

$$\wp u=-\frac{E\sigma'\sigma''+(e_2^2-e_3^2)\sigma_1'\sigma_1''+(e_3^2-e_1^2)\sigma_2'\sigma_2''+(e_1^2-e_2^2)\sigma_3'\sigma''_3}{(e_2-e_3)\sigma_1'\sigma_1''+(e_3-e_1)\sigma_2'\sigma_2''+(e_1-e_2)\sigma_3'\sigma_3''}$$

$$\wp v=-\frac{-E\sigma'\sigma''+(e_2^2-e_3^2)\sigma_1'\sigma_1''+(e_3^2-e_1^2)\sigma_2'\sigma_2''+(e_1^2-e_2^2)\sigma_3'\sigma_3''}{(e_2-e_3)\sigma_1'\sigma_1''+(e_3-e_1)\sigma_2'\sigma_2''+(e_1-e_2)\sigma_3'\sigma_3''}$$

В этих трех формулах положено[1]

$$\sigma'=\sigma(u+v),\qquad \sigma_1'=\sigma_1(u+v),\qquad \sigma_2'=\sigma_2(u+v),\qquad \sigma_3'=\sigma_3(u+v)$$

$$\sigma''=\sigma(u-v),\qquad \sigma_1''=\sigma_1(u-v),\qquad \sigma_2''=\sigma_2(u-v),\qquad \sigma_3''=\sigma_3(u-v)$$

Полагая

$$P_\alpha=\frac{\sigma_\alpha(u_1+u_2)\,\sigma_\alpha(u_1-u_2)}{\sigma(u_1+u_2)\,\sigma(u_1-u_2)}=\sqrt{(s_1-e_\alpha)(s_2-e_\alpha)}\qquad(\alpha=1,2,3)$$

имеем

$$\wp(u_1)+\wp(u_2)=-2\frac{(e_2^2-e_3^2)P_1+(e_3^2-e_1^2)P_2+(e_1^2-e_2^2)P_3}{(e_2-e_3)P_1+(e_3-e_1)P_2+(e_1-e_2)P_3}$$

$$\wp(u_1)-\wp(u_2)=\frac{-2E}{(e_2-e_3)P_1+(e_3-e_1)P_2+(e_1-e_2)P_3}$$

$$\wp(u_1)\wp(u_2)=$$

$$=-\frac{(e_2-e_3)(e_1^2+e_2e_3)P_1+(e_3-e_1)(e_2^2+e_3e_1)P_2+(e_1-e_2)(e_3^2+e_1e_2)P_3}{(e_2-e_3)P_1+(e_3-e_1)P_2+(e_1-e_2)P_3}$$

---

[1] Соответствующие формулы статьи С. В. Ковалевской в Acta Mathematica приведены без этих обозначений; введение их вызвано форматом настоящего издания; при этом сохранена структура формул оригинала и не затрагивается дальнейшее изложение. *Прим. ред.*

Внося эти выражения в формулы

$$p=\frac{x_1+x_2}{2}=i\left(h_0+E\,\frac{h_1(\wp u_1+\wp u_2)+2h_2}{h_1^2\wp u_1\wp u_2+h_1h_2(\wp u_1+\wp u_2)+h_2^2}\right)$$

$$q=\frac{x_1-x_2}{2i}=E\,\frac{h_1(\wp u_1-\wp u_2)}{h_1^2\wp u_1\wp u_2+h_1h_2(\wp u_1+\wp u_2)+h_2^2}$$

находим, после некоторых вычислений,

$$p=-i\,\frac{L_1P_1+M_1P_2+N_1P_3}{LP_1+MP_2+NP_3}$$

$$q=\frac{E}{LP_1+MP_2+NP_3}$$

где я положила

$$L=(e_2-e_3)\frac{\sigma_1}{\sigma}(w)=i(e_2-e_3)\sqrt{l_1+e_1}$$

$$M=(e_3-e_1)\frac{\sigma_2}{\sigma}(w)=i(e_3-e_1)\sqrt{l_1+e_2}$$

$$N=(e_1-e_2)\frac{\sigma_3}{\sigma}(w)=i(e_1-e_2)\sqrt{l_1+e_3}$$

$$L_1=(e_2-e_3)\frac{\sigma_2}{\sigma}(w)\frac{\sigma_3}{\sigma}(w)=(e_2-e_3)\sqrt{(l_1+e_2)(l_1+e_3)}$$

$$M_1=(e_3-e_1)\frac{\sigma_3}{\sigma}(w)\frac{\sigma_1}{\sigma}(w)=(e_3-e_1)\sqrt{(l_1+e_3)(l_1+e_1)}$$

$$N_1=(e_1-e_2)\frac{\sigma_1}{\sigma}(w)\frac{\sigma_2}{\sigma}(w)=(e_1-e_2)\sqrt{(l_1+e_1)(l_1+e_2)}$$

Величины l_1+e_1, l_1+e_2, l_1+e_3 все три положительны. Величины s_1-e_1, s_1-e_2, s_1-e_3 также положительны. Величины s_2-e_1, s_2-e_2, s_2-e_3, напротив, все отрицательны.

Следовательно, L, M, N, P_1, P_2, P_3 комплексные, L_1, M_1, N_1 вещественны.

Видим, что p и q имеют вещественные значения. Для вычисления величины r я пользуюсь уравнением

$$2\frac{dp}{dt}=qr$$

В общем случае, если положим

$$R(s)=R_0(s-a_0)(s-a_1)(s-a_2)(s-a_3)(s-a_4)$$

$$du_1=\frac{s_1\,ds_1}{\sqrt{R(s_1)}}+\frac{s_2\,ds_2}{\sqrt{R(s_2)}},\qquad ds_1=\frac{\sqrt{R(s_1)}}{s_1-s_2}(du_1-s_2\,du_2)$$

$$du_2=\frac{ds_1}{\sqrt{R(s_1)}}+\frac{ds_2}{\sqrt{R(s_2)}},\qquad ds_2=\frac{\sqrt{R(s_2)}}{s_2-s_1}(du_1-s_1\,du_2)$$

$$P_\alpha=\sqrt{c_\alpha(s_1-a_\alpha)(s_2-a_\alpha)}\qquad\begin{pmatrix}\alpha=0,\ \dots,\ 4\\ \beta=0,\ \dots,\ 4\end{pmatrix}$$

$$P_{\alpha\beta}=\frac{c_{\alpha\beta}P_\alpha P_\beta}{s_1-s_2}\left\{\frac{\sqrt{R(s_1)}}{(s_1-a_\alpha)(s_1-a_\beta)}-\frac{\sqrt{R(s_2)}}{(s_2-a_\alpha)(s_2-a_\beta)}\right\}$$

где c_α и $c_{\alpha\beta}$ обозначают произвольные постоянные, то после некоторых вычислений найдем

$$\frac{\partial P_\alpha}{\partial u_1}=\frac{1}{2(a_\beta-a_\gamma)}\left\{\frac{P_\gamma P_{\alpha\gamma}}{c_\gamma c_{\alpha\gamma}}-\frac{P_\beta P_{\alpha\beta}}{c_\beta c_{\alpha\beta}}\right\}$$

$$\frac{\partial P_\alpha}{\partial u_2}=\frac{1}{2(a_\beta-a_\gamma)}\left\{\frac{a_\gamma P_\beta P_{\alpha\beta}}{c_\beta c_{\alpha\beta}}-\frac{a_\beta P_\gamma P_{\alpha\gamma}}{c_\gamma c_{\alpha\gamma}}\right\}$$

$$\frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial u_1}=\frac{1}{2}R_0c_{\alpha\beta}P_\alpha P_\beta$$

$$\frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial u_2}=-\frac{1}{2}R_0a_\gamma c_{\alpha\beta}P_\alpha P_\beta-\frac{1}{2}\frac{c_{\alpha\beta}P_{\alpha\gamma}P_{\beta\gamma}}{c_\gamma c_{\alpha\gamma}c_{\beta\gamma}}$$

В нашем случае имеем

$$R(s)=-4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)(s-k_1)(s-k_2),\qquad R_0=-4$$

$$dt=du_1\qquad 0=du_2$$

Следовательно, находим

$$r=\frac{2}{q}\frac{dp}{dt}=-i\frac{LP_{23}+MP_{31}+NP_{12}}{LP_1+MP_2+NP_3}$$

$$P_{23}=\frac{i}{s_1-s_2}\{\sqrt{(s_1-e_1)(s_1-k_1)(s_1-k_2)(s_2-e_2)(s_2-e_3)}-$$
$$-\sqrt{(s_1-e_2)(s_1-e_3)(s_2-e_1)(s_2-k_1)(s_2-k_2)}\}$$

$$P_{13}=\frac{i}{s_1-s_2}\{\sqrt{(s_1-e_2)(s_1-k_1)(s_1-k_2)(s_2-e_1)(s_2-e_3)}-$$
$$-\sqrt{(s_1-e_3)(s_1-e_1)(s_2-e_2)(s_2-k_1)(s_2-k_2)}\}$$

$$P_{12}=\frac{i}{s_1-s_2}\{\sqrt{(s_1-e_3)(s_1-k_1)(s_1-k_2)(s_2-e_1)(s_2-e_2)}-$$
$$-\sqrt{(s_1-e_1)(s_1-e_2)(s_2-e_3)(s_2-k_1)(s_2-k_2)}\}$$

Как мы видели выше, для вещественных значений t_1, s_1 и s_2 должны заключаться в следующих пределах:

$$\infty\cdots s_1\cdots e_1, \qquad e_3\cdots s_2\cdots-\infty$$

Следовательно, выражения

$$(s_1-e_1)(s_2-e_2)(s_2-e_3)$$
$$(s_1-e_2)(s_2-e_3)(s_2-e_1)$$
$$(s_1-e_3)(s_2-e_1)(s_2-e_2)$$

положительны, а выражения

$$(s_1-e_2)(s_1-e_3)(s_2-e_1)$$
$$(s_1-e_3)(s_1-e_1)(s_2-e_2)$$
$$(s_1-e_1)(s_1-e_2)(s_2-e_3)$$

отрицательны.

Для того чтобы r было вещественным для вещественных значений t, нужно, чтобы P_{23}, P_{13}, P_{12} были вещественны; чтобы это имело место, нужно, чтобы произведение

$$(s_1 - k_1)(s_2 - k_2)$$

было отрицательным, а произведение

$$(s_2 - k_1)(s_2 - k_2)$$

положительным.

Следовательно, постоянные интегрирования должны быть выбраны таким образом, чтобы удовлетворялось неравенство

$$k_1 > e_1 > k_2$$

Тогда s_1 и s_2 должны будут содержаться в пределах

$$(k_1 \ldots s_1 \ldots e_1), \qquad (k_2 \ldots s_2 \ldots -\infty)$$

Остается вычислить величины γ, γ', γ''; γ'' получаем из уравнения

$$2\frac{dq}{dt} = -rp - c_0\gamma''$$

или

$$c_0\gamma'' = -\left(2\frac{dq}{dt} + rp\right)$$

С помощью указанных выше формул дифференцирования находим

$$c_0\gamma'' = \frac{L_1P_{23} + M_1P_{13} + N_1P_{12}}{LP_{23} + MP_{13} + NP_{12}}$$

где коэффициенты L, M, N, L_1, M_1, N_1 имеют те же значения, что и раньше.

Величина γ' может быть вычислена с помощью уравнения

$$\frac{dr}{dt} = c_0\gamma'$$

Находим

$$c_0\gamma' = -i\,\frac{(LP_1+MP_2+NP_3)\left(L\frac{d}{dt}P_{23}+M\frac{d}{dt}P_{13}+N\frac{d}{dt}P_{12}\right)}{(LP_1+MP_2+NP_3)^2} -$$

$$-i\,\frac{(LP_{23}+MP_{13}+NP_{12})\left(L\frac{d}{dt}P_1+M\frac{d}{dt}P_2+N\frac{d}{dt}P_3\right)}{(LP_1+MP_2+NP_3)^2}$$

С помощью указанных выше формул дифференцирования находим

$$(LP_1+MP_2+NP_3)\left(L\frac{d}{dt}P_{23}+M\frac{d}{dt}P_{13}+N\frac{d}{dt}P_{12}\right)-$$

$$-(LP_{23}+MP_{13}+NP_{12})\left(L\frac{d}{dt}P_1+M\frac{d}{dt}P_2+N\frac{d}{dt}P_3\right)=$$

$$=R_0(LP_1+MP_2+NP_3)(LP_2P_3+MP_3P_1+NP_1P_2)-$$

$$-(LP_{23}+MP_{31}+NP_{12})\left(L\frac{P_3P_{13}-P_2P_{12}}{e_2-e_3}+\right.$$

$$\left.+M\frac{P_1P_{12}-P_3P_{23}}{e_3-e_1}+N\frac{P_2P_{23}-P_1P_{13}}{e_1-e_2}\right)=$$

$$=R_0(L^2+M^2+N^2)P_1P_2P_3-\frac{L^2}{e_2-e_3}P_{23}(P_3P_{13}-P_2P_{12})-$$

$$-\frac{M^2}{e_3-e_1}P_{13}(P_1P_{12}-P_3P_{23})-\frac{N^2}{e_1-e_2}P_{12}(P_2P_{23}-P_1P_{13})+$$

$$+MN\left(R_0(P_2^2+P_3^2)P_1-P_{13}\frac{P_2P_{23}-P_1P_{13}}{e_1-e_2}-P_{12}\frac{P_1P_{12}-P_3P_{23}}{e_3-e_1}\right)+$$

$$+NL\left(R_0(P_3^2+P_1^2)P_2-P_{12}\frac{P_3P_{13}-P_2P_{12}}{e_2-e_3}-P_{23}\frac{P_2P_{23}-P_1P_{13}}{e_1-e_2}\right)+$$

$$+LM\left(R_0(P_1^2+P_2^2)P_3-P_{23}\frac{P_1P_{12}-P_3P_{23}}{e_3-e_1}-P_{13}\frac{P_3P_{13}-P_2P_{12}}{e_2-e_3}\right)$$

Это выражение числителя γ' может быть несколько упрощено следующим образом.

Обозначая через α, β, γ, δ, ε числа 1, 2, 3, 4, 5, расположенные в каком-нибудь порядке, и полагая, как мы это уже делали,

$$P_\alpha = \sqrt{(s_1 - a_\alpha)(s_2 - a_\alpha)}$$

$$P_{\alpha\beta} = \frac{\sqrt{R_0(s_1 - a_\gamma)(s_1 - a_\delta)(s_1 - a_\varepsilon)(s_2 - a_\alpha)(s_2 - a_\beta)}}{s_1 - s_2} - \frac{\sqrt{R_0(s_1 - a_\alpha)(s_1 - a_\beta)(s_2 - a_\gamma)(s_2 - a_\delta)(s_2 - a_\varepsilon)}}{s_1 - s_2}$$

легко находим следующие соотношения:

$$R_0 P_\alpha P_\beta P_\gamma - P_{\beta\gamma} \frac{P_\gamma P_{\alpha\gamma} - P_\beta P_{\alpha\beta}}{a_\beta - a_\gamma} = P_{\alpha\delta} P_{\alpha\varepsilon}$$

$$R_0 P_\alpha P_\beta P_\gamma - P_{\alpha\gamma} \frac{P_\alpha P_{\alpha\beta} - P_\gamma P_{\beta\gamma}}{a_\gamma - a_\alpha} = P_{\beta\delta} P_{\beta\varepsilon}$$

$$R_0 P_\alpha P_\beta P_\gamma - P_{\alpha\beta} \frac{P_\beta P_{\beta\gamma} - P_\alpha P_{\alpha\gamma}}{a_\alpha - a_\beta} = P_{\gamma\delta} P_{\gamma\varepsilon}$$

$$R_0(P_\beta^2 + P_\gamma^2) P_\alpha - P_{\alpha\gamma} \frac{P_\beta P_{\beta\gamma} - P_\alpha P_{\alpha\gamma}}{a_\alpha - a_\beta} - P_{\alpha\beta} \frac{P_\alpha P_{\alpha\beta} - P_\gamma P_{\beta\gamma}}{a_\gamma - a_\alpha} = \\ = P_{\beta\delta} P_{\gamma\varepsilon} + P_{\beta\varepsilon} P_{\gamma\delta} + R_0(a_\beta - a_\gamma)^2 P_\alpha$$

$$R_0(P_\gamma^2 + P_\alpha^2) P_\beta - P_{\alpha\beta} \frac{P_\gamma P_{\alpha\gamma} - P_\beta P_{\alpha\beta}}{a_\beta - a_\gamma} - P_{\beta\gamma} \frac{P_\beta P_{\beta\gamma} - P_\alpha P_{\alpha\gamma}}{a_\alpha - a_\beta} = \\ = P_{\gamma\delta} P_{\alpha\varepsilon} + P_{\alpha\delta} P_{\gamma\varepsilon} + R_0(a_\gamma - a_\alpha)^2 P_\beta$$

$$R_0(P_\alpha^2 + P_\beta^2) P_\gamma - P_{\beta\gamma} \frac{P_\alpha P_{\alpha\beta} - P_\gamma P_{\beta\gamma}}{a_\gamma - a_\alpha} - P_{\alpha\gamma} \frac{P_\gamma P_{\alpha\gamma} - P_\beta P_{\alpha\beta}}{a_\beta - a_\gamma} = \\ = P_{\alpha\delta} P_{\beta\varepsilon} + P_{\alpha\varepsilon} P_{\beta\delta} + R_0(a_\alpha - a_\beta)^2 P_\gamma$$

Следовательно, если положим

$$a_1=e_1, \qquad k_1=a_4$$
$$a_2=e_2, \qquad k_2=a_5$$
$$a_3=e_3,$$

то найдем для $c_0\gamma'$ следующее выражение:

$$c_0\gamma'=\frac{i}{2}\left\{\frac{L^2P_{14}P_{15}+M^2P_{24}P_{25}+N^2P_{34}P_{35}}{(LP_1+MP_2+NP_3)^2}+\right.$$
$$+\frac{MN\,[P_{24}P_{35}+P_{25}P_{34}+(e_2-e_3)^2\,P_1]}{(LP_1+MP_2+NP_3)^2}+$$
$$+\frac{NL\,[P_{34}P_{15}+P_{35}P_{14}+(e_3-e_1)^2\,P_2]}{(LP_1+MP_2+NP_3)^2}+$$
$$\left.+\frac{LM\,[P_{14}P_{25}+P_{15}P_{24}+(e_1-e_2)^2P_3}{(LP_1+MP_2+NP_3)^2}\right\}$$

Наконец, найдем величину γ, выраженную через s_1 и s_2, с помощью уравнения

$$2\,(p^2+q^2)+r^2=2c_0\gamma+6l_1$$

Полагая

$$L_2=(e_2^2-e_3^2)\,\frac{\sigma_1}{\sigma}\,(w)=i\,(e_2^2-e_3^2)\sqrt{l_1+e_1}$$

$$M_2=(e_3^2-e_1^2)\frac{\sigma_2}{\sigma}\,(w)=i\,(e_3^2-e_1^2)\sqrt{l_1+e_2}$$

$$N_2=(e_1^2-e_2^2)\,\frac{\sigma_3}{\sigma}\,(w)=i\,(e_1^2-e_2^2)\sqrt{l_1+e_3}$$

находим

$$2c_0\gamma=-4l_1+\frac{L_2P_1+M_2P_2+N_2P_3}{LP_1+MP_2+NP_3}-\left(\frac{LP_{23}+MP_{13}+NP_{12}}{LP_1+MP_2+NP_3}\right)^2$$

§ 6

Выразив шесть величин $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ в функциях от s_1 и s_2, без труда получим с помощью общих формул выражение любой рациональной функции, симметричной относительно последних выражений, в функции времени.

Я пользуюсь следующими выражениями, введенными в анализ Вейерштрассом, из мемуара Кенигсбергера „К преобразованию абелевых функций" („Zur Transformation der Abelschen Funktionen". Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd 64).

Пусть

$$R(x) = A_0(x - a_0)(x - a_1) \ldots (x - a_{2\rho})$$

есть целая функция от x степени $2\rho + 1$; предположим, что A, a_0, a_1, ..., $a_{2\rho}$ все вещественны и, если $A_0 > 0$,

$$a_0 > a_1 > \ldots > a_{2\rho}$$

но если $A_0 < 0$

$$a_0 < a_1 < \ldots < a_{2\rho}$$

Пусть $u_1, \ldots, u_\rho$ будут ρ переменных, связанных с ρ переменными $x_1, \ldots, x_\rho$ следующими ρ уравнениями, в которых $F_1(x), \ldots, F_\rho(x)$ обозначают целые функции x степени ниже ρ,

$$u_1 = \int_{a_1}^{x_1} \frac{F_1(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \ldots + \int_{a_{2\rho-1}}^{x_\rho} \frac{F_1(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_\rho = \int_{a_1}^{x_1} \frac{F_\rho(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \ldots + \int_{a_{2\rho-1}}^{x_\rho} \frac{F_\rho(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

Положим

$$K_{\alpha\beta}=\int\limits_{a_{2\beta-1}}^{a_{2\beta}}\frac{F_\alpha(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}},\qquad i\overline{K}_{\alpha\beta}=\int\limits_{a_{2\beta-2}}^{a_{2\beta-1}}\frac{F_\alpha(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

$$iK'_{\mu\nu}=i\overline{K}_{\mu 1}+i\overline{K}_{\mu 2}+\ldots+i\overline{K}_{\mu\nu}$$

условившись определять квадратный корень в каждом из этих интегралов формулой

$$\sqrt{R(x)}=A_0^{\rho+1}\left(\frac{x-a_0}{A_0}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x-a_1}{A_0}\right)^{\frac{1}{2}}\ldots\left(\frac{x-a_{2\rho}}{A_0}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Определим ρ новых переменных $v_1,\ldots,v_\rho$ уравнениями

$$u_1=2K_{11}v_1+\ldots+2K_{1\rho}v_\rho$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_\rho=2K_{\rho 1}v_1+\ldots+2K_{\rho\rho}v_\rho.$$

Предположим, что эти уравнения, разрешенные относительно $v_1,\ldots,v_\rho$, дадут нам

$$v_1=G_{11}u_1+\ldots+G_{\rho 1}u_\rho$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$v_\rho=G_{1\rho}u_1+\ldots+G_{\rho\rho}u_\rho$$

Положим

$$\tau_{\alpha\beta}=2i\,(G_{1\alpha}K_{1\beta}+\ldots+G_{\rho\alpha}K_{\rho\beta})$$

откуда следует, что $\tau_{\alpha\beta}=\tau_{\beta\alpha}$, и определим функцию $\vartheta(v_1,\ldots,v_\rho)$ как сумму бесконечного ряда

$$\vartheta(v_1\ldots v_\rho)=\sum e^{\{\nu_1(2v_1+\nu_1\tau_{11}+\ldots+\nu_\rho\tau_{1\rho})+\ldots\nu_\rho(2v_\rho+\nu_1\tau_{\rho 1}+\ldots+\nu_\rho\tau_{\rho\rho})\}\pi i}$$

Здесь суммирование, обозначенное символом Σ, должно производиться таким образом, чтобы каждое из ρ чисел $\nu_1, \ldots, \nu_\rho$ пробегало независимо от других весь ряд целых чисел от $-\infty$ до $+\infty$.

Функция $\vartheta(v_2, \ldots, v_\rho)$ удовлетворяет двум следующим уравнениям:

$$\vartheta(v_1+p_1, \ldots, v_\rho+p_\rho)=\vartheta(v_1, \ldots, v_\rho)$$

где $p_1, \ldots, p_\rho$ — любые целые числа, и

$$\vartheta(v_1+\tau_{1\alpha}, \ldots, v_\rho+\tau_{\rho\alpha})=\vartheta(v_1, \ldots, v_\rho)\, e^{-(2v_\alpha+\tau_{\alpha\alpha})\pi i}$$

Обратно, всякая непрерывная функция $v_1, \ldots, v_\rho$, удовлетворяющая этим двум уравнениям для всех систем значений $v_1, \ldots, v_\rho$, должна необходимо равняться $\vartheta(v_1, \ldots, v_\rho)$, умноженной на постоянную.

Обозначим через $n_1, \ldots, n_\rho$ произвольные постоянные, положим

$$\tau_\alpha=n_1\tau_{\alpha 1}+n_2\tau_{\alpha 2}+\ldots+n_\rho\tau_{\alpha\rho}$$

и определим новую функцию $\vartheta(v_1, \ldots, v_\rho \mid n_1, \ldots, n_\rho)$ с помощью уравнения

$$\vartheta(v_1, \ldots, v_\rho \mid n_1, \ldots, n_\rho)=\vartheta(v_1+\tau_1, \ldots, v_\rho+\tau_\rho)\, e^{\Sigma_\alpha n_\alpha(2v_\alpha+\tau_\alpha)\pi i}$$

Величины $n_1, \ldots, n_\rho$ называются *параметрами* этой новой функции ϑ. Если $n_1', \ldots, n_\rho'$ обозначают другую систему ρ постоянных и если положим

$$\tau'_\alpha=n_1'\tau_{\alpha 1}'+\ldots+n_\rho'\tau_{\alpha\rho}$$

то будем иметь

$$\vartheta(v_1+\tau_1', \ldots, v_\rho+\tau_\rho' \mid n_1, \ldots, n_\rho)=$$

$$=\vartheta(v_1, \ldots, v_\rho \mid n_1+n_1', \ldots, n_\rho+n_\rho')e^{-\Sigma n_\alpha'(2v_\alpha+\tau_\alpha')\pi i}$$

Если величины $n_1', \ldots, n_\rho', m_1, \ldots, m_\rho$ суть числа целые, то имеем

$$\vartheta(v_1, \ldots, v_\rho \mid n_1 + n_1', \ldots, n_\rho + n_\rho') = \vartheta(v_1, \ldots, v_\rho \mid n_1, \ldots, n_\rho)$$

$$\vartheta(v_1 + m_1, \ldots, v_\rho + m_\rho \mid n_1, \ldots, n_\rho) = \\ = e^{\sum_\alpha 2m_\alpha n_\alpha \pi i}\,\vartheta(v_1, \ldots, v_\rho \mid n_1, \ldots, n_\rho)$$

$$\vartheta(v_1 + \tau_1', \ldots, v_\rho + \tau_\rho' \mid n_1, \ldots, n_\rho) = \\ = e^{-\sum n_\alpha'(2v_\alpha + \tau_\alpha')\pi i}\,\vartheta(v_1, \ldots, v_\rho \mid n_1, \ldots, n_\rho)$$

Положим, кроме того,

$$\vartheta(v_1, \ldots, v_\rho)_\lambda = \vartheta(v_1 + {}^1/_2\, m_1^\lambda, \ldots, v_\rho + {}^1/_2 m_\rho^\lambda \mid {}^1/_2 n_1^\lambda, \ldots, {}^1/_2\, n_\rho^\lambda)$$

$$(\lambda = 0, 1, 2, \ldots, 2_\rho).$$

где целые числа $m_1^\lambda, \ldots, m_\rho^\lambda, n_1^\lambda, \ldots, n_\rho^\lambda$ определены уравнением

$$\int\limits_{\infty}^{a_\lambda} \frac{F_\alpha(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = m_1^\lambda K_{\alpha 1} + \ldots + m_\rho^\lambda K_{\alpha\rho} + \\ + i\,(n_1^\lambda K_{\alpha 1}' + n_2^\lambda K_{\alpha 2}' + \ldots + n_\rho^\lambda K'_{\alpha\rho}).$$

Легко убедиться, что каждое из целых чисел $m_1^\lambda, \ldots, m_\rho^\lambda$ равно 0 или -1 и что каждое из целых чисел $n_1^\lambda, \ldots, n_\rho^\lambda$ равно 0 или $+1$.

Обозначая затем через λ и μ какие-нибудь два различных числа из ряда $0, 1, \ldots, 2\rho$, определим целые числа $m_1^\nu, \ldots, m_\rho^\nu$, $n_1^\nu, \ldots, n_\rho^\nu$ с помощью сравнений

$$\left.\begin{aligned} m_\alpha^\nu &\equiv m_\alpha^\lambda + m_\alpha^\mu \\ n_\alpha^\nu &\equiv n_\alpha^\lambda + n_\alpha^\mu \end{aligned}\right\} \pmod 2$$

и, кроме того, условием, что каждое из чисел m_λ^ν должно равняться 0 или -1, а каждое из чисел n_λ^ν равно 0 или $+1$, и положим

$$\vartheta(v_1, \ldots, v_\rho)_{\lambda\mu} = \vartheta(v_1 + {}^1/_2 m_1^\nu, \ldots, v_\rho + {}^1/_2 m_\rho^\nu \mid {}^1/_2 n_1^\nu, \ldots, {}^1/_2 n_\rho^\nu)$$

Зависимость между переменными $v_1, \ldots, v_\rho$ и $x_1, \ldots, x_\rho$ может тогда быть выражена следующим образом.

Положим

$$\varphi(x) = (x - x_1) \ldots (x - x_\rho)$$

и обозначим ± 1 через ε, смотря по тому, $A_0 \gtrless 0$; тогда имеем

$$\frac{\sqrt{\varepsilon^\rho (-1)^\alpha \varphi \mid a_{2\alpha} \mid}}{\sqrt[4]{R' a_{2\alpha}}} = \frac{\vartheta(v_1, \ldots, v_\rho)_{2\alpha}}{\vartheta(v_1, \ldots, v_\rho)}$$

$$\frac{\sqrt{\varepsilon^\rho (-1)^{\alpha-1} \varphi(a_{2\alpha} - 1)}}{\sqrt[4]{R'(a_{2\alpha-1})}} = \frac{\vartheta(v_1, \ldots, v_\rho)_{2\alpha-1}}{\vartheta(v_1, \ldots, v_\rho)}$$

$$A_0 \sqrt{\frac{\pm(a_\lambda - a_\mu)}{A_0}} \sum_{\alpha=1}^{\rho} \left\{ \frac{\sqrt{R(x_\alpha)}}{(x_\alpha - a_\lambda)(x_\alpha - a_\mu)\varphi'(x_\alpha)} \right\} =$$

$$= \frac{\vartheta(v_1, \ldots, v_\rho)\, \vartheta(v_1, \ldots, v_\rho)_{\lambda\mu}}{\vartheta(v_1, \ldots, v_\rho)_\lambda\, \vartheta(v_1, \ldots, v_\rho)_\mu}$$

Мы предположили, что все корни уравнения $R(x) = 0$ вещественны. Г. Хенох (Henoch) показал в своей диссертации (Берлин, 1867), как эти формулы могут быть обобщены на случай, когда корни уравнения $R(x) = 0$ комплексны.

§ 7

Чтобы иметь возможность приложить формулы предыдущего параграфа к занимающему нас случаю, нужно расположить пять вещественных величин k_1, k_2, e_1, e_2, e_3 по их величине.

Здесь может представиться ряд случаев. Отсутствие времени мешает мне исследовать их подробно. Я ограничусь тем, что проделаю все вычисления для случая, когда между постоянными интегрирования выполняются следующие неравенства:

$$l_1 > k > c_0 > 0, \qquad l^2 < \frac{3l_1 - k}{2}$$

В этом случае, если напишем

$$4s^3 - g_2 s - g_3 =$$

$$= 4(s + l_1)\left(s - \frac{l_1 + \sqrt{k^2 - c_0^2}}{2}\right)\left(s - \frac{l_1 - \sqrt{k^2 - c_0^2}}{2}\right) - l_0^2$$

то легко убедимся, что пять величин e_1, e_2, e_3, k_1, k_2 удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\frac{l_1 + k}{2} > e_1 > e_2 > \frac{l_1 - k}{2} > e_3$$

Если обозначим через a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 пять корней уравнения $R(s) = 0$, расположенных в порядке возрастания величины

$$a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4$$

то нужно положить

$$\frac{l_1 + k}{2} = a_4, \quad \frac{l_1 - k}{2} = a_1, \quad e_1 = e_3, \quad e_2 = a_2, \quad e_3 = a_0.$$

Если теперь положим

$$dt = du_1 = \frac{s_1\,ds_1}{\sqrt{R(s_1)}} + \frac{s_2\,ds_2}{\sqrt{R(s_2)}}$$

$$0 = du_2 = \frac{ds_1}{\sqrt{R(s_1)}} + \frac{ds_2}{\sqrt{R(s_2)}}$$

и если определим величины $K_{\alpha\beta}$, $K'_{\alpha\beta}$, $v_1, \ldots, v_\rho$ так, как это было показано в предыдущем параграфе, то v_1, v_2 будут линейными функциями времени, и, обозначая через c_λ значение, которое принимает $\vartheta(v_1, v_2)_\lambda$ при $v_1 = 0$, $v_2 = 0$, получим следующие соотношения:

$$\frac{a_3 - a_2}{a_4 - a_1} = \frac{e_1 - e_2}{k} = \frac{c_2^2 c_{03}^2 c_{34}^2}{c_4^2 c_{01}^2 c_{12}^2}$$

$$\frac{l_1 + e_1}{k} = \frac{a_4 + a_1 - a_2 - a_0}{a_4 - a_1} = \frac{c_5^2 c_{23}^2}{c_4^2 c_{01}^2} - \frac{c_2^2 c_{14}^2}{c_4^2 c_{12}^2}$$

$$\frac{a_3 - a_0}{a_4 - a_1} = \frac{e_1 - e_3}{k} = \frac{c_0^2 c_{23}^2 c_{34}^2}{c_4^2 c_{01}^2 c_{12}^2}$$

$$\frac{l_1 + e_2}{k} = \frac{a_4 + a_1 - a_0 - a_3}{a_4 - a_1} = \frac{c_5^2 c_{23}^2}{c_4^2 c_{01}^2} - \frac{c_0^2 c_2^2}{c_{01}^2 c_{12}^2}$$

$$\frac{a_2 - a_0}{a_4 - a_1} = \frac{e_2 - e_3}{k} = \frac{c_5^2 c_{14}^2 c_{34}^2}{c_4^2 c_{01}^2 c_{12}^2}$$

$$\frac{l_1 + e_3}{k} = \frac{a_4 + a_1 - a_3 - a_2}{a_4 - a_2} = \frac{c_5^2 c_{03}^2}{c_4^2 c_{12}^2} - \frac{c_0^2 c_2^2}{c_{01}^2 c_{12}^2}.$$

и, полагая

$$C = (a_3 - a_1)^{\frac{3}{2}} \frac{c_{01} c_{03} c_{12} c_{23} c_{14} c_{34}}{c_0^2 c_2^2 c_4^2}$$

будем иметь

$$P_1=\sqrt{(s_1-e_1)(s_2-e_1)}=\sqrt{(s_1-a_3)(s_2-a_3)}=$$

$$=-i\frac{C}{\sqrt{a_3-a_1}}\frac{c_0c_2c_4}{c_{01}c_{12}c_{14}}\frac{\vartheta_3(v_1,v_2)}{\vartheta_5(v_1,v_2)}$$

$$P_2=\sqrt{(s_1-e_2)(s_2-e_2)}=\sqrt{(s_1-a_2)(s_2-a_2)}=$$

$$=-i\frac{C}{\sqrt{a_3-a_1}}\frac{c_5c_2}{c_{12}c_{23}}\frac{\vartheta_2(v_1,v_2)}{\vartheta_5(v_1,v_2)}$$

$$P_3=\sqrt{(s_1-e_3)(s_2-e_3)}=\sqrt{(s_1-a_0)(s_2-a_0)}=$$

$$=\frac{C}{\sqrt{a_3-a_1}}\frac{c_5c_0}{c_{01}c_{03}}\frac{\vartheta_0(v_1,v_2)}{\vartheta_5(v_1,v_2)}$$

$$P_4=\sqrt{(s_1-k_1)(s_2-k_1)}=\sqrt{(s_1-a_4)(s_2-a_4)}=$$

$$=-\frac{C}{\sqrt{a_3-a_1}}\frac{c_5c_4}{c_{14}c_{34}}\frac{\vartheta_4(v_1,v_2)}{\vartheta_5(v_1,v_2)}$$

$$P_5=\sqrt{(s_1-k_2)(s_2-k_2)}=\sqrt{(s_1-a_1)(s_2-a_1)}=$$

$$=\frac{C}{\sqrt{a_3-a_1}}\frac{c_0c_2c_4}{c_{03}c_{22}c_{34}}\frac{\vartheta_1(v_1,v_2)}{\vartheta_5(v_1,v_2)}$$

$$P_{12}=\frac{\sqrt{(s_1-e_3)(s_1-k_1)(s_1-k_2)(s_2-e_1)(s_2-e_2)}}{s_1-s_2}-$$

$$-\frac{\sqrt{(s_1-e_1)(s_1-e_2)(s_2-e_3)(s_2-k_1)(s_2-k_2)}}{s_1-s_2}=iC\frac{c_5}{c_{12}}\frac{\vartheta_{23}(v_1,v_2)}{\vartheta_5(v_1,v_2)}$$

$$P_{13}=\frac{\sqrt{(s_1-e_2)(s_1-k_1)(s_1-k_2)(s_2-e_1)(s_2-e_3)}}{s_1-s_2}-$$

$$-\frac{\sqrt{(s_1-e_1)(s_1-e_3)(s_2-e_2)(s_2-k_1)(s_2-k_2)}}{s_1-s_2}=-C\frac{c_5}{c_{01}}\frac{\vartheta_{03}(v_1,v_2)}{\vartheta_5(v_1,v_2)}$$

$$P_{14}=\frac{\sqrt{(s_1-e_2)(s_1-e_3)(s_1-k_2)(s_2-e_1)(s_2-k_1)}}{s_1-s_2}-$$

$$-\frac{\sqrt{(s_1-e_1)(s_1-k_1)(s_2-e_2)(s_2-e_3)(s_2-k_2)}}{s_1-s_2}=-C\frac{c_5}{c_{14}}\frac{\vartheta_{34}(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)}$$

$$P_{15}=\frac{\sqrt{(s_1-e_2)(s_1-e_3)(s_1-k_1)(s_2-e_1)(s_2-k_2)}}{s_1-s_2}-$$

$$-\frac{\sqrt{(s_1-e_1)(s_1-k_2)(s_2-e_2)(s_2-e_3)(s_2-k_1)}}{s_1-s_2}=-C\frac{\vartheta_{13}(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)}$$

$$P_{23}=\frac{\sqrt{(s_1-e_1)(s_1-k_1)(s_1-k_2)(s_2-e_2)(s_2-e_3)}}{s_1-s_2}-$$

$$-\frac{\sqrt{(s_1-e_2)(s_1-e_3)(s_2-e_1)(s_2-k_1)(s_2-k_2)}}{s_1-s_2}=C\frac{c_5}{c_4}\frac{\vartheta_{02}(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)}$$

$$P_{24}=\frac{\sqrt{(s_1-e_1)(s_1-e_3)(s_1-k_2)(s_2-e_2)(s_2-k_1)}}{s_1-s_2}-$$

$$-\frac{\sqrt{(s_1-e_2)(s_1-k_1)(s_2-e_1)(s_2-e_3)(s_2-k_2)}}{s_1-s_2}=-C\frac{c_5}{c_0}\frac{\vartheta_{24}(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)}$$

$$P_{25}=\frac{\sqrt{(s_1-e_1)(s_1-e_3)(s_1-k_1)(s_2-e_2)(s_2-k_2)}}{s_1-s_2}-$$

$$-\frac{\sqrt{(s_1-e_2)(s_1-k_2)(s_2-e_1)(s_2-e_3)(s_2-k_1)}}{s_1-s_2}=C\frac{c_5}{c_{23}}\frac{\vartheta_{12}(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)}$$

$$P_{34}=\frac{\sqrt{(s_1-e_1)(s_1-e_2)(s_1-k_2)(s_2-e_3)(s_2-k_1)}}{s_1-s_2}-$$

$$-\frac{\sqrt{(s_1-e_3)(s_1-k_1)(s_2-e_1)(s_2-e_2)(s_2-k_2)}}{s_1-s_2}=-iC\frac{c_5}{c_2}\frac{\vartheta_{04}(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)}$$

$$P_{35}=\frac{\sqrt{(s_1-e_1)(s_1-e_2)(s_1-k_1)(s_2-e_3)(s_2-k_2)}}{s_1-s_2}-$$

$$-\frac{\sqrt{(s_1-e_3)(s_1-k_2)(s_2-e_1)(s_2-e_2)(s_2-k_1)}}{s_1-s_2}=-iC\frac{c_5}{c_{03}}\frac{\vartheta_{01}(v_1,v_2)}{\vartheta_5(v_1,v_2)}$$

$$P_{45}=\frac{\sqrt{(s_1-e_1)(s_1-e_2)(s_1-e_3)(s_2-k_1)(s_2-k_2)}}{s_1-s_2}-$$

$$-\frac{\sqrt{(s_1-k_1)(s_1-k_2)(s_2-e_1)(s_2-e_2)(s_2-e_3)}}{s_1-s_2}=-iC\frac{c_5}{c_{34}}\frac{\vartheta_{14}(v_1,v_2)}{\vartheta_5(v_1,v_2)}$$

После того как шесть величин p, q, r, γ, γ', γ'' выражены с помощью отношений

$$\frac{\vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\vartheta(v_1, v_2)}$$

в которых v_1, v_2 обозначают целые линейные функции времени t, нужно найти выражения остальных шести косинусов α, α', α'', β, β', β'' в функции времени.

Эти величины удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\alpha}{dt}=\alpha' r-\alpha'' q, \qquad \frac{d\beta}{dt}=\beta' r-\beta'' q$$

$$\frac{d\alpha'}{dt}=\alpha'' p-\alpha r, \qquad \frac{d\beta'}{dt}=\beta'' p-\beta r$$

$$\frac{d\alpha''}{dt}=\alpha q-\alpha' p, \qquad \frac{d\beta''}{dt}=\beta q-\beta' p$$

Из этих уравнений следует

$$\frac{d(\alpha+\beta i)}{dt}=(\alpha'+\beta' i)r-(\alpha''+\beta'' i)q$$

Разделив на $\alpha + \beta i$ и замечая, что

$$(\alpha' + \beta' i)(\alpha - \beta i) = \alpha\alpha' + \beta\beta' + i(\alpha\beta' - \alpha'\beta) = -\gamma\gamma' + i\gamma''$$

$$(\alpha'' + \beta'' i)(\alpha - \beta i) = \alpha\alpha'' + \beta\beta'' + i(\alpha\beta'' - \alpha''\beta) = -\gamma\gamma'' - i\gamma'$$

$$(\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i) = \alpha^2 + \beta^2 = 1 - \gamma^2$$

находим

$$\frac{d}{dt}\lg(\alpha + \beta i) = r\,\frac{-\gamma\gamma' + i\gamma''}{1 - \gamma^2} + q\,\frac{\gamma\gamma'' + i\gamma'}{1 - \gamma^2} = \frac{-\gamma\dfrac{d\gamma}{dt} + i(\gamma' q + \gamma'' r)}{1 - \gamma^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\dfrac{d\gamma}{dt} + i(\gamma' q + \gamma'' r)}{1 + \gamma} - \frac{\dfrac{d\gamma}{dt} - i(\gamma' q + \gamma'' r)}{1 - \gamma}\right\}$$

Таким же образом находим

$$\frac{d}{dt}\lg(\alpha' + \beta' i) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\dfrac{d\gamma'}{dt} + i(\gamma p + \gamma'' r)}{1 + \gamma'} - \frac{\dfrac{d\gamma'}{dt} - i(\gamma p + \gamma'' r)}{1 - \gamma'}\right\}$$

$$\frac{d}{dt}\lg(\alpha'' + \beta'' i) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\dfrac{d\gamma''}{dt} + i(\gamma p + \gamma' q)}{1 + \gamma''} - \frac{\dfrac{d\gamma''}{dt} - i(\gamma p + \gamma' q)}{1 + \gamma''}\right\}$$

Внося во вторые части этих уравнений величины p, q, r, γ, γ', γ'', выраженные в функциях времени, видим, что для получения величин α, β, α', β', α'', β'' нужно будет интегрировать рациональные функции от отношений

$$\frac{\vartheta_\alpha(t + c, c_1)}{\vartheta(t + c, c_1)}$$

Можно показать, что каждая из шести величин α, α', α'', β, β', β'' есть однозначная функция времени, имеющая только полюсы для конечных значений времени.

По хорошо известной теореме $f(t)$ есть однозначная функция, которая может быть представлена в форме отношения двух рядов, сходящихся для всех конечных значений t, если выполнено следующее условие:

$$\frac{d}{dt}\lg f(t)$$

может быть разложена в окрестности каждого конечного значения t_0 в сходящийся ряд вида

$$\frac{d}{dt}\lg f(t) = m(t-t_0)^{-1} + \mathfrak{P}(t-t_0)$$

где $\mathfrak{P}(t-t_0)$ обозначает бесконечный ряд, содержащий члены только с положительными показателями, а m равно нулю или целому числу, положительному или отрицательному.

Но это как раз имеет место для вторых членов уравнений, которые определяют

$$\frac{d}{dt}\lg(\alpha+\beta i), \qquad \frac{d}{dt}\lg(\alpha'+\beta' i), \qquad \frac{d}{dt}\lg(\alpha''+\beta'' i)$$

в функциях времени.

Если в этих вторых членах напишем вместо γ, γ', γ'', p, q, r их значения в функциях времени и если, рассматривая t в окрестности t_0, разложим их в ряды по степеням $t-t_0$, то непосредственно видим, что члены с отрицательным показателем могут войти в это разложение только в двух следующих случаях:

1) если разложения p, q, r, γ, γ', γ'' содержат отрицательные степени $(t-t_0)$,

2) если для $t=t_0$ одна из трех величин γ, γ', γ'' будет равна ± 1.

Возвращаясь к дифференциальным уравнениям (1) и обозначая $t-t_0$ через τ, видим, что в первом случае разло-

жения p, q, r, γ, γ', γ'' должны иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} p &= p_0\tau^{-1} + p_1 + p_2\tau + \ldots, & \gamma &= f_0\tau^{-2} + f_1\tau^{-1} + f_2 + \ldots \\ q &= q_0\tau^{-1} + q_1 + q_2\tau + \ldots, & \gamma' &= g_0\tau^{-2} + g_1\tau^{-1} + g_2 + \ldots \\ r &= r_0\tau^{-1} + r_1 + r_2\tau + \ldots, & \gamma'' &= h_0\tau^{-2} + h_1\tau^{-1} + h_2 + \ldots \end{aligned}$$

где коэффициенты p_0, q_0, r_0, f_0, g_0, h_0 могут иметь две системы различных значений (см. § 1):

$$\text{I.} \qquad \begin{aligned} r_0 &= 0, & h_0 &= \pm i\frac{4}{c_0} \\ q_0 &= \pm i2, & g_0 &= 0 \\ p_0 &= 0, & f_0 &= -\frac{4}{c_0} \end{aligned}$$

$$\text{II.} \qquad q_0 = \pm ip_0, \quad g_0 = \pm if_0 = -\frac{r_0}{c_0} = \mp\frac{2i}{c_0}$$

$$r_0 = \pm 2i, \qquad h_0 = 0$$

Внося эти разложения во вторые части уравнений

$$\frac{d\lg(\alpha'' + \beta'' i)}{dt} = \frac{\gamma''\frac{d\gamma''}{dt} - i(\gamma p + \gamma' q)}{\gamma''^2 - 1} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\frac{d\gamma''}{dt} - i(\gamma p + \gamma' q)}{\gamma'' - 1} + \frac{\frac{d\gamma''}{dt} + i(\gamma p + \gamma' q)}{\gamma'' + 1}\right\}$$

видим, что в случае I имеем

$$\frac{d}{dt}\lg(\alpha'' + \beta'' i) = -2\tau^{-1} + \mathfrak{P}(\tau)$$

а в случае II

$$\frac{d}{dt}\lg(\alpha'' + \beta'' i) = -\tau^{-1} + \mathfrak{P}(\tau)$$

Исследуем теперь разложение

$$\frac{d}{dt}\lg(\alpha'' + \beta'' i)$$

около значения $t = t_0$, для которого $\gamma'' = \pm 1$.

В общем случае, если положим

$$\begin{aligned} p &= p_0 + p_1 t + \ldots, & \gamma &= f_0 + f_1 t + \ldots, \\ q &= q_0 + q_1 t + \ldots, & \gamma' &= g_0 + g_1 t + \ldots, \\ r &= r_0 + r_1 t + \ldots, & \gamma'' &= h_0 + h_1 t + \ldots, \end{aligned}$$

коэффициенты p_1, q_1, r_1, f_1, g_1, h_1 определяются [на основании дифференциальных уравнений (1) § 2] в функциях p_0, q_0, r_0, f_0, g_0, h_0 следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} 2p_1 &= q_0 r_0, & f_1 &= r_0 g_0 - q_0 h_0 \\ 2q_1 &= -p_0 r_0 - c_0 h_0, & g_1 &= p_0 h_0 - r_0 f_0 \\ r_1 &= c_0 g_0, & h_1 &= q_0 f_0 - p_0 g_0 \end{aligned}$$

Три величины γ, γ', γ'' связаны уравнением

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1$$

Следовательно, их начальные значения f_0, g_0, h_0 также подчинены условию

$$f_0^2 + g_0^2 + h_0^2 = 1$$

Обозначим через ε_1 и ε_2 две величины, удовлетворяющие уравнениям

$$\varepsilon_1^2 = 1, \qquad \varepsilon_2^2 = 1$$

Если я положу $h_0 = \varepsilon_1$, то нужно, чтобы в то же время $g_0 = \varepsilon_2 i f_0$, тогда находим

$$h_1 = -\varepsilon_2 i f_0 (p_0 + \varepsilon_2 i q_0)$$

$$p_0 f_0 + q_0 g_0 = f_0 (p_0 + \varepsilon_2 i q_0) = \varepsilon_2 i h_1$$

Следовательно, разложение члена

$$\frac{1}{2}\frac{\frac{d\gamma''}{dt}-i\varepsilon_1(p\gamma+q\gamma')}{\gamma''-\varepsilon_1}$$

который только один может содержать отрицательные степени τ, имеет вид

$$\frac{1+\varepsilon_1\varepsilon_2}{2}\tau^{-1}+\mathfrak{P}(t)$$

Если ε_1 и ε_2 одного знака, то коэффициент при τ^{-1} равен $+1$. Если ε_1 и ε_2 противоположных знаков, этот коэффициент равен нулю.

Видим, следовательно, что во всех случаях разложение

$$\frac{d}{dt}\lg(\alpha''+\beta''i)$$

имеет желаемую форму

$$\frac{d}{dt}\lg(\alpha''+\beta''i)=m(t-t_0)^{-1}+\mathfrak{P}(t-t_0)$$

откуда вытекает, что $\alpha''+\beta''i$ есть однозначная функция времени, могущая быть представленной в форме отношения двух сходящихся рядов.

Относительно $\alpha+\beta i$ и $\alpha'+\beta' i$ приходим к тем же результатам.

Я убедилась также, что эти величины могут быть выражены в рациональных функциях выражений вида

$$\frac{\vartheta_\alpha(u_1+v_1,\,u_2+v_2)}{\vartheta(u_1u_2)}e^{u_3}$$

где α — индекс одной из 16 функций $\vartheta(u_1u_2)$, u_1, u_2, u_3 — целые линейные функции времени, v_1 и v_2 — произвольные постоянные.

Но вследствие большой сложности вычислений я еще не пришла к представлению этих формул в окончательном виде.

§ 8

Может представиться интересным осуществление на модели случая вращения твердого тела около неподвижной точки, в котором выполняются все условия случая, который мы только что изучили.

В дифференциальных уравнениях (1) постоянные A, B, C обозначают три главных момента инерции относительно неподвижной точки.

Пусть теперь A_1, B_1, C_1 будут три главных момента инерции этого же тела относительно его центра тяжести, и обозначим через x, y, z координаты точки в системе координат, начало которой находится в центре тяжести и направления осей которой совпадают с направлениями трех главных осей инерции, проходящих через эту точку.

Тогда, обозначая через μ плотность рассматриваемого тела в точке с координатами x, y, z, имеем

$$A_1 = \iiint \mu (y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$$

$$B_1 = \iiint \mu (z^2 + x^2)\, dx\, dy\, dz$$

$$C_1 = \iiint \mu (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz$$

$$0 = \iiint \mu x\, dx\, dy\, dz, \quad 0 = \iiint \mu y\, dx\, dy\, dz, \quad 0 = \iiint \mu z\, dx\, dy\, dz$$

$$0 = \iiint \mu yz\, dx\, dy\, dz, \quad 0 = \iiint \mu zx\, dx\, dy\, dz, \quad 0 = \iiint \mu xy\, dx\, dy\, dz$$

Все эти тройные интегралы должны быть распространены на всю внутреннюю область рассматриваемого тела.

Пусть a, b, c будут координаты точки O. Обозначая через ξ, η, ζ координаты точки пространства относительно осей, параллельных предыдущим, но начало которых совпадает с точкой O, имеем

$$\xi = x - a, \qquad \eta = y - b, \qquad \zeta = z - c$$

Уравнение эллипсоида инерции, центр которого находится в точке O, есть, как известно,

$$1 = A_1'\xi^2 + B_1'\eta^2 + C_1'\zeta^2 - 2D_1'\eta\zeta - 2E_1'\zeta\xi - 2F_1'\xi\eta = \varphi(\xi, \eta, \zeta)$$

где коэффициенты $A_1', B_1', \ldots$ определяются уравнениями

$$A_1' = \iiint \mu(\eta^2 + \zeta^2)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = A_1 + M(b^2 + c^2)$$

$$B_1' = \iiint \mu(\zeta^2 + \xi^2)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = B_1 + M(c^2 + a^2)$$

$$C_1' = \iiint \mu(\xi^2 + \eta^2)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = C_1 + M(a^2 + b^2)$$

$$D_1' = \iiint \mu\, \eta\zeta\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = Mbc$$

$$E_1' = \iiint \mu\, \zeta\xi\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = Mca$$

$$F_1' = \iiint \mu\, \xi\eta\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = Mab$$

а M означает полную массу тела:

$$M = \iiint \mu\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

Пусть теперь u, v, w будут координаты точки пространства относительно осей, начало которых находится в точке O, но направления которых совпадают с направлениями главных осей эллипсоида инерции, соответствующих этой точке. Тогда имеем

$$u = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta$$

$$v = \alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1\zeta$$

$$w = \alpha_2\xi + \beta_2\eta + \gamma_2\zeta$$

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = u^2 + v^2 + w^2$$

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = \lambda u^2 + \mu v^2 + \nu w^2$$

где λ, μ, ν — положительные постоянные.

Кроме того, обозначая через u_0, v_0, w_0 координаты центра тяжести этой новой системы, имеем

$$-u_0 = \alpha a + \beta b + \gamma c$$
$$-v_0 = \alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c$$
$$-w_0 = \alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c$$

Если мы теперь сообщим рассматриваемому телу вращение вокруг неподвижной точки O, то условия изученного нами случая будут выполнены, если будем иметь

$$\lambda = \mu = 2\nu$$
$$-w_0 = \alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c = 0$$

Следовательно, нужно иметь возможность удовлетворить следующим уравнениям:

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = \nu\,[2(u^2 + v^2) + w^2]$$
$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = u^2 + v^2 + w^2$$

$$a\alpha_2 + b\beta_2 + c\gamma_2 = 0$$
$$\alpha_2{}^2 + \beta_2{}^2 + \gamma_2{}^2 = 1$$

Посмотрим, можно ли выбрать точку O таким образом, чтобы эти уравнения были выполнены.

Из двух первых уравнений следует

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) - 2\nu\,(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = -\nu w^2$$

Так как последнее уравнение должно выполняться тождественно, то, если написать для w его выражение

$$w = \alpha_2\xi + \beta_2\eta + \gamma_2\zeta$$

получим, приравнивая нулю коэффициенты всех членов в этом тождестве, следующие уравнения:

$$A_1' - 2\nu = A_1 + M(b^2 + c^2) - 2\nu = -\nu\alpha_2^2$$
$$B_1' - 2\nu = B_1 + M(c^2 + a^2) - 2\nu = -\nu\beta_2^2$$
$$C_1' - 2\nu = C_1 + M(a^2 + b^2) - 2\nu = -\nu\gamma_2^2$$

$$D_1' = Mbc = \nu\beta_2\gamma_2$$
$$E_1' = Mca = \nu\gamma_2\alpha_2$$
$$F_1' = Mab = \nu\alpha_2\beta_2$$

Если бы ни одна из трех постоянных a, b, c (координат точки O) не была равна нулю, то из трех последних уравнений вытекало бы

$$M^3a^2b^2c^2 = \nu^3\alpha_2^2\beta_2^2\gamma_2^2$$
$$M^{1/2}a = \nu^{1/2}\alpha_2$$
$$M^{1/2}b = \nu^{1/2}\beta_2$$
$$M^{1/2}c = \nu^{1/2}\gamma_2$$

что, очевидно, невозможно вследствие уравнений

$$\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1$$
$$a\alpha_2 + b\beta_2 + c\gamma_2 = 0$$

так как ни M, ни ν не могут равняться нулю.

Если предположим, что $c = 0$, но a и b отличны от нуля, то должны положить $\gamma_2 = 0$, и, следовательно,

$$Mab = \nu\alpha_2\beta_2, \qquad \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1, \qquad a\alpha_2 + b\beta_2 = 0$$

откуда следует

$$\alpha_2 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \beta_2 = \frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(знак $\sqrt{a^2+b^2}$ выбирается произвольно),

$$M = \frac{-\nu}{a^2+b^2}$$

последнее уравнение невозможно, так как M и ν — положительные числа. Следовательно, надо положить $b=0$, $c=0$.

Тогда имеем

$$A_1' = A_1, \quad B_1' = B_1 + Ma^2, \quad C_1' = C_1 + Ma^2$$
$$D_1' = 0, \quad E_1' = 0, \quad F_1' = 0$$
$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = A_1\xi^2 + (B_1 + Ma^2)\eta^2 + (C_1 + Ma^2)\zeta^2$$

Если три главные оси инерции A_1, B_1, C_1 относительно центра тяжести рассматриваемого тела удовлетворяют уравнению

$$A_1 = 2(B_1 - C_1)$$

то можно удовлетворить всем предположенным условиям, беря

$$a^2 = \frac{A_1 - B_1}{M}$$

так как в этом случае

$$B_1 + Ma^2 = A_1, \quad C_1 + Ma^2 = C_1 + A_1 - B_1 = \frac{1}{2}A_1$$

следовательно,

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = A_1\left(\xi^2 + \eta^2 + \frac{1}{2}\zeta^2\right)$$

Заметим только, что для того, чтобы a была вещественной, необходимо и достаточно, чтобы $B_1 > 2C_1$.

Видим, следовательно, согласно этим вычислениям, что возможно механически осуществить условия задачи, которую я здесь изучала.

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЙ ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ОКОЛО НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

В моем мемуаре „Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки*" я показала, что дифференциальные уравнения**

$$
\begin{aligned}
A\frac{dp}{dt} &= (B-C)\,qr + y_0\gamma'' - z_0\gamma', &\quad \frac{d\gamma}{dt} &= r\gamma' - q\gamma'' \\
B\frac{dq}{dt} &= (C-A)\,rp + z_0\gamma - x_0\gamma'', &\quad \frac{d\gamma'}{dt} &= p\gamma'' - r\gamma \\
C\frac{dr}{dt} &= (A-B)\,pq + x_0\gamma' - y_0\gamma, &\quad \frac{d\gamma''}{dt} &= q\gamma - p\gamma'
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

к которым приводится рассматриваемая задача, не допускают, вообще говоря, системы однозначных интегралов, содержащих пять произвольных постоянных и могущих иметь только полюсы на всей плоскости переменной t.

---

* Acta math., t. 12.

** Ради краткости я буду все время писать в настоящем мемуаре x_0, y_0, z_0 вместо Mgx_0. Mgy_0. Mgz_0. Следовательно, x_0, y_0, z_0 обозначают координаты центра тяжести твердого тела, умноженные на массу этого тела и на интенсивность силы тяжести.

В самом деле, в этом случае можно было бы проинтегрировать дифференциальные уравнения (1) рядами вида:

$$
\begin{aligned}
p &= t^{-1} \sum_{0}^{\infty} {}_n p_n t^n, & \gamma &= t^{-2} \sum_{0}^{\infty} {}_n f_n t^n \\
q &= t^{-1} \sum_{0}^{\infty} {}_n q_n t^n, & \gamma' &= t^{-2} \sum_{0}^{\infty} {}_n g_n t^n \\
r &= t^{-1} \sum_{0}^{\infty} {}_n r_n t^n, & \gamma'' &= t^{-2} \sum_{0}^{\infty} {}_n h_n t^n
\end{aligned}
\tag{2}
$$

которые должны быть равномерно сходящимися в некоторой области и должны, кроме того, содержать *пять произвольных постоянных*. Но, как я показала в моем указанном выше мемуаре, для $n = 1, 2, \ldots$ коэффициенты $p_n, q_n, r_n, f_n, g_n, h_n$ в рядах (2) определяются системой следующих линейных уравнений:

$$
\begin{aligned}
&(n-1) A p_n - A_1 (q_0 r_n + r_0 q_n) + z_0 g_n - y_0 h_n = P_n \\
&(n-1) B q_n - B_1 (r_0 p_n + p_0 r_n) + x_0 h_n - z_0 f_n = Q_n \\
&(n-1) C r_n - C_1 (p_0 q_n + q_0 p_n) + y_0 f_n - x_0 g_n = R_n \\
&(n-2) f_n - r_0 g_n - g_0 r_n + q_0 h_n + h_0 q_n = F_n \\
&(n-2) g_n - p_0 h_n - h_0 p_n + r_0 f_n + f_0 r_n = G_n \\
&(n-2) h_n - q_0 f_n - f_0 q_n + p_0 g_n + g_0 p_n = H_n
\end{aligned}
\tag{3}
$$

где $P_n, \ldots, H_n$ обозначают целые функции от коэффициентов $p_m, \ldots, h_m$ таких, для которых $m < n$.

Для $n = 0$ имеем систему следующих уравнений:

$$
\begin{aligned}
-A p_0 &= A_1 q_0 r_0 + y_0 h_0 - z_0 g_0, & -2 f_0 &= r_0 g_0 - q_0 h_0 \\
-B q_0 &= B_1 r_0 p_0 + z_0 f_0 - x_0 h_0, & -2 g_0 &= p_0 h_0 - r_0 f_0 \\
-C r_0 &= C_1 p_0 q_0 + x_0 g_0 - y_0 f_0, & -2 h_0 &= q_0 f_0 - p_0 g_0
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Я показала в указанном выше моем мемуаре, что за исключением трех специальных случаев имеется лишь конечное число систем значений p_0, q_0, r_0, f_0, g_0, h_0, удовлетворяющих уравнениям (4).

Для каждой из этих систем величины всех коэффициентов $p_n, \ldots, h_n$ полностью определяются линейными уравнениями (3), если только определитель этих уравнений не равен нулю для некоторых целых положительных значений n. Этот определитель я и хочу теперь вычислить.

Я должна снова, как и в цитированном мною мемуаре, различать два случая.

Первый случай. Вещественные положительные величины A, B, C таковы, что ни одна из разностей

$$A_1 = B - C, \qquad B_1 = C - A, \qquad C_1 = A - B$$

не равна нулю. В этом случае я показала в моем мемуаре, что уравнения (4) могут быть удовлетворены лишь следующей системой значений p_0, q_0, r_0, g_0, f_0, h_0. Если положим

$$a = \sqrt{\frac{2A + \lambda}{A_1}}, \qquad b = \sqrt{\frac{2B + \lambda}{B_1}}, \qquad c = \sqrt{\frac{2C + \lambda}{C_1}}$$

(выбрав знак каждого из корней произвольным образом), то должны иметь

$$p_0 = bc, \qquad q_0 = ca, \qquad r_0 = -ab$$

Положив затем

$$\mu = Ax_0p_0 + By_0q_0 + Cz_0r_0$$

находим

$$f_0 = -A_1q_0r_0\frac{\lambda}{\mu} = (2A + \lambda)\,p_0\frac{\lambda}{\mu}$$

$$g_0 = -B_1r_0p_0\frac{\lambda}{\mu} = (2B + \lambda)\,q_0\frac{\lambda}{\mu}$$

$$h_0 = -C_1p_0q_0\frac{\lambda}{\mu} = (2C + \lambda)\,r_0\frac{\lambda}{\mu}$$

где λ обозначает какой-нибудь из корней алгебраического уравнения

$$Ax_0p_0 + By_0q_0 + Cz_0r_0 = -(A_1x_0q_0r_0 + B_1y_0r_0p_0 + C_1z_0p_0q_0)$$

(Это уравнение, приведенное к рациональному виду, есть уравнение восьмой степени относительно λ, если постоянные A, B, C, x_0, y_0, z_0 не зависят друг от друга.)

Для облегчения вычислений я буду писать 2λ вместо λ. Тогда, полагая

$$a^2 = \frac{A+\lambda}{A_1}, \qquad b^2 = \frac{B+\lambda}{B_1}, \qquad c^2 = \frac{C+\lambda}{C_1}$$

$$\mu = 2(Ax_0bc + By_0ca - Cz_0ab)$$

$$\begin{aligned} p_0 &= 2bc, & f_0 &= -\frac{2\lambda}{\mu} A_1q_0r_0 = \frac{4\lambda(A+\lambda)}{\mu} p_0 \\ q_0 &= 2ca, & g_0 &= -\frac{2\lambda}{\mu} B_1r_0p_0 = \frac{4\lambda(B+\lambda)}{\mu} q_0 \\ r_0 &= -2ab, & h_0 &= -\frac{2\lambda}{\mu} C_1p_0q_0 = \frac{4\lambda(C+\lambda)}{\mu} r_0 \end{aligned} \tag{5}$$

где λ — корень алгебраического уравнения, имеем

$$\begin{aligned} &x_0(A+2\lambda)\sqrt{\frac{B+\lambda}{B_1}}\sqrt{\frac{C+\lambda}{C_1}} + \\ &+ y_0(B+2\lambda)\sqrt{\frac{C+\lambda}{C_1}}\sqrt{\frac{A+\lambda}{A_1}} + \\ &+ z_0(C+2\lambda)\sqrt{\frac{A+\lambda}{A_1}}\sqrt{\frac{B+\lambda}{B_1}} = 0 \end{aligned}$$

Чтобы вычислить определитель уравнений (3), я попытаюсь решить эти уравнения в предположении, что

$$P_n = Q_n = R_n = F_n = G_n = H_n = 0$$

Я полагаю

$$\begin{aligned} u_1 &= p_0 p_n + q_0 q_n + r_0 r_n \\ u_2 &= A p_0 p_n + B q_0 q_n + C r_0 r_n \\ u_3 &= A^2 p_0 p_n + B^2 q_0 q_n + C^2 r_0 r_n \end{aligned} \qquad (6)$$

откуда следует

$$p_0 p_n = -\frac{BCu_1 - (B + C) u_2 + u_3}{B_1 C_1}$$

$$q_0 q_n = -\frac{CAu_1 - (C + A) u_2 + u_3}{C_1 A_1}$$

$$r_0 r_n = -\frac{ABu_1 - (A + B) u_2 + u_3}{A_1 B_1}$$

Кроме того, я полагаю

$$\begin{aligned} v_1 &= g_0 r_n - h_0 q_n \\ v_2 &= h_0 p_n - f_0 r_n \\ v_3 &= f_0 q_n - g_0 p_n \end{aligned} \qquad (7)$$

Тогда три последних уравнения (3) приводятся к

$$\begin{aligned} (n-2) f_n - r_0 g_n + q_0 h_n &= v_1 \\ r_0 f_n + (n-2) g_n - p_0 h_n &= v_2 \\ - q_0 f_n + p_0 g_n + (n-2) h_n &= v_3 \end{aligned}$$

Если я положу $n-2=m$, то определитель этой системы уравнений будет равен

$$\begin{vmatrix} m & -r_0 & q_0 \\ r_0 & m & -p_0 \\ -q_0 & p_0 & m \end{vmatrix} = m(m^2 + p_0^2 + q_0^2 + r_0^2) =$$

$$= m(m^2 - 4) = n(n-2)(n-4)$$

Следовательно, предполагая, что n не равно ни 2, ни 4, находим

$$n(n-2)(n-4)f_n=$$
$$=(m^2+p_0^2)v_1+(p_0q_0+mr_0)v_2+(p_0r_0-mq_0)v_3=$$
$$=(n-4)\frac{2\lambda}{\mu}p_0[(Am-2\lambda)u_1-(m+2)u_2]$$

Разделив, на $(n-4)$, получим, следовательно,

$$\begin{aligned} n(n-2)f_n&=\frac{2\lambda}{\mu}p_0(Amu_1-2\lambda u_1-nu_2)\\ n(n-2)g_n&=\frac{2\lambda}{\mu}q_0(Bmu_1-2\lambda u_1-nu_2)\\ n(n-2)h_n&=\frac{2\lambda}{\mu}r_0(Cmu_1-2\lambda u_1-nu_2)\end{aligned} \tag{8}$$

Возьмем теперь три первых уравнения (3)

$$\begin{aligned}(n-1)Ap_n-A_1(q_0r_n+r_0q_n)&=y_0h_n-z_0g_n\\ (n-1)Bq_n-B_1(r_0p_n+p_0r_n)&=z_0f_n-x_0h_n\\ (n-1)Cr_n-C_1(p_0q_n+q_0p_n)&=x_0g_n-y_0f_n\end{aligned} \tag{9}$$

Умножив их соответственно на p_0, q_0, r_0 и сложив, получим

$$(n-1)u_2+\sum A_1q_0r_0p_n=\sum x_0(r_0g_n-q_0h_n) \tag{10}$$

(Знаки Σ обозначают суммирование по трем симметричным величинам ABC, $A_1B_1C_1$, $p_0q_0r_0$ или $x_0y_0z_0$.) Но

$$\sum A_1q_0r_0p_n=-2\sum(A+\lambda)p_0p_n=-2(u_2+\lambda u_1)$$

$$n(n-2)(r_0g_n-q_0h_n)=\frac{2\lambda}{\mu}r_0q_0A_1mu_1 \qquad (m=n-2)$$

следовательно, в силу того, что $\Sigma x_0A_1q_0r_0=-\mu$:

$$n\sum x_0(r_0g_n-q_0h_n)=-2\lambda u_1$$

Уравнение (10) приводится, таким образом, к следующему:

$$n\{(n-1)u_2-2(u_2+\lambda u_1)\}=-2\lambda u_1$$

или

$$n(n-3)u_2-2(n-1)\lambda u_1=0 \qquad (11)$$

Точно так же, умножая обе части каждого из уравнений (9) соответственно на Ap_0, Bq_0, Cr_0 и складывая их, находим

$$(n-1)u_3+\sum AA_1q_0r_0p_n=\sum x_0(Cr_0g_n-Bq_0h_n) \qquad (12)$$

Но

$$\sum AA_1q_0r_0p_n=-2\sum A(A+\lambda)p_0p_n=-2(\lambda u_2+u_3)$$

$$n(n-2)(Cr_0g_n-Bq_0h_n)=\frac{2\lambda}{\mu}A_1r_0q_0(2\lambda u_1+nu_2)$$

$$n(n-2)\sum x_0(Cr_0g_n-Bq_0h_n)=-2\lambda(2\lambda u_1+nu_2)$$

Уравнение (12) приводится, таким образом, к следующему:

$$n(n-2)\{(n-3)u_3-2\lambda u_2\}=-4\lambda^2u_1-2\lambda nu_2$$

или

$$n(n-2)(n-3)u_3-2n(n-3)\lambda u_2+4\lambda^2u_1=0 \qquad (13)$$

Комбинируя уравнения (12) и (13), находим

$$4\lambda^2u_1=n(n-3)u_3$$
$$2\lambda u_2=(n-1)u_3$$

Внося эти выражения u_1 и u_2 в уравнения (8), находим

$$f_n=\frac{p_0}{2\mu\lambda}\{(n-3)A-4\lambda\}u_3$$

$$g_n=\frac{q_0}{2\mu\lambda}\{(n-3)B-4\lambda\}u_3 \qquad (14)$$

$$h_n=\frac{r_0}{2\mu\lambda}\{(n-3)C-4\lambda\}u_3$$

Положим теперь

$$k_0 = A + B + C, \qquad k_1 = BC + CA + AB, \qquad k_2 = ABC \tag{15}$$

умножим каждое из уравнений (9) соответственно на BCp_0, CAq_0, ABr_0 и составим из них сумму

$$\begin{aligned} k_2(n-1)u_1 - \sum (ABC_1 + ACB_1) q_0 r_0 p_n = \\ = \sum x_0 (ABr_0 g_n - ACq_0 h_n) \end{aligned} \tag{16}$$

Но имеем

$$\begin{aligned} \sum (ABC_1 + ACB_1) q_0 r_0 p_n = 2 \sum A(A+\lambda)(B + C - A) p_0 p_n = \\ = 2[-2k_2 u_1 + (2k_1 + \lambda k_0) u_2 - (k_0 + 2\lambda) u_3] \end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} k_2(n-1)u_1 - \sum (ABC_1 + ACB_1) q_0 r_0 p_n = \\ = (n+3) k_2 u_1 - 2(2k_1 + \lambda k_0) u_2 + 2(k_0 + 2\lambda) u_3 \end{aligned}$$

или, внося в это уравнение величины u_1 и u_2, выраженные через u_3, получаем

$$\begin{aligned} k_2(n-1)u_1 - \sum (ABC_1 + ACB_1) q_0 r_0 p_n = \frac{u_3}{4\lambda^2} \{n^3 k_2 - n(9k_2 + \\ + 8\lambda k_1 + 4\lambda^2 k_0) + 4\lambda(2k_1 + 3\lambda k_0 + 4\lambda^2)\} \end{aligned}$$

С другой стороны, находим

$$\begin{aligned} ABr_0 g_n - ACq_0 h_n = \frac{r_0 q_0}{2\mu\lambda} \{(n-3) A (B + C) A_1 - 4\lambda A A_1\} = \\ = -\frac{p_0}{\mu\lambda} (A + \lambda) \{(n-3) A (B + C) - 4\lambda A\} = \\ = \frac{p_0}{\mu\lambda} \{(n-3) k_2 - [(n-3)(k_1 + \lambda k_0) - 4\lambda^2] A + (n+1) \lambda A^2\} \end{aligned}$$

Имеем

$$\sum A x_0 p_0 = \mu, \qquad \sum x_0 p_0 = -\frac{\mu}{2\lambda}$$

Положим еще

$$\sum A^2 x_0 p_0 = \mu_1$$

Тогда найдем

$$\sum x_0 (ABr_0 g_n - ACq_0 h_n) =$$

$$= \frac{u_3}{2\lambda^2}\left\{-(n-3)k_2 - 2(n-3)(k_1 + \lambda k_0)\lambda + 8\lambda^3 + 2(n+1)\lambda^2 \frac{\mu_1}{\mu}\right\} =$$

$$= \frac{u_3}{2\lambda^2}\left\{-n(k_2 + 2k_1\lambda + 2k_0\lambda^2) + 3k_2 + 6k_1\lambda + \right.$$

$$\left. + 6k_0\lambda^2 + 8\lambda^3 + 2(n+1)\lambda^2 \frac{\mu_1}{\mu}\right\}$$

Внося эти величины в уравнение (16), находим

$$(n-1)k_2 u_1 - \sum (ABC_1 + ACB_1) q_0 r_0 p_n -$$

$$- \sum x_0 (ABr_0 g_n - ACq_0 h_n) =$$

$$= \frac{u_3}{4\lambda^2}\left\{n^3 k_2 - n(7k_2 + 4k_1\lambda) - 6k_2 - 4k_1\lambda - 4(n+1)\lambda^2 \frac{\mu_1}{\mu}\right\} =$$

$$= \frac{u_3}{4\lambda^2}(n+1)\left\{n(n-1)k^2 - 6k_2 - 4k_1\lambda - 4\lambda^2 \frac{\mu_1}{\mu}\right\} = 0$$

Из самого способа, которым мы получили это выражение, ясно, что множитель при u_3, умноженный на $n(n-2)(n-4)$, есть определитель системы уравнений (3)

$$\Delta = (n+1)n(n-2)(n-4)\left(n(n-1)k_2 - 6k^2 - \right.$$

$$\left. - 4k_1\lambda - 4\lambda^2 \frac{\mu_1}{\mu}\right)$$

Так как уравнение $\Delta = 0$ не имеет ни для какой системы значений постоянных A, B, C, x_0, y_0, z_0 *пяти* корней, равных целым положительным числам, то отсюда следует, что, если все три величины A_1, B_1, C_1 одновременно отличны от

нуля, ряды (2) не могут содержать необходимого для представления *общей* системы интегралов дифференциальных уравнений (1) числа произвольных постоянных. Общие интегралы этих уравнений не могут, следовательно, быть однозначными функциями времени, имеющими лишь полюсы в каждой конечной области переменной t.

Рассмотрим теперь *второй случай* и предположим, что $A=B$. Положим

$$u=p+qi, \qquad \alpha=\gamma+\gamma' i, \qquad A=A-C=-B_1$$
$$v=p-qi, \qquad \beta=\gamma-\gamma' i, \qquad C_1=0$$

Так как в этом случае всегда можно выбрать оси координат таким образом, чтобы $y_0=0$, то дифференциальные уравнения задачи могут быть написаны в следующей форме:

$$A\frac{du}{dt}+iA_1ru=i(z_0\alpha-x_0\gamma''), \qquad \frac{d\alpha}{dt}=-\,i(r\alpha-u\gamma'')$$
$$A\frac{dv}{dt}-iA_1rv=-i(z_0\beta-x_0\gamma''), \qquad \frac{d\beta}{dt}=\ i(r\beta-v\gamma'')$$
$$C\frac{dr}{dt}=-\frac{x_0 i}{2}(\alpha-\beta), \qquad \frac{d\gamma''}{dt}=-\frac{i}{2}(u\beta-v\alpha)$$

Если положим

$$u=t^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}u_nt^n, \qquad \alpha=t^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_nt^n$$
$$v=t^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}v_nt^n, \qquad \beta=t^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}\beta_nt^n$$
$$r=t^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}r_nt^n, \qquad \gamma''=t^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}h_nt^n$$

то будем иметь

$$u_0=p_0+q_0i, \qquad \alpha_0=f_0+g_0i$$
$$v_0=p_0-q_0i, \qquad \beta_0=f_0-g_0i$$

В своем цитированном выше мемуаре я показала, что в случае $A = B$ уравнения, которым должны удовлетворять величины p_0, q_0, r_0, f_0, g_0, h_0, допускают две системы решений. В первой из этих двух систем имеем

$$p_0 = \varepsilon i \frac{z_0}{A - 2C} \frac{2C}{x_0}, \qquad f_0 = -\frac{2C}{x_0}$$

$$q_0 = \varepsilon i p_0, \qquad g_0 = \varepsilon i f_0, \quad \varepsilon_0^2 = 1$$

$$r_0 = 2\varepsilon i, \qquad h_0 = 0$$

Положим $\varepsilon = 1$, тогда

$$u_0 = 0, \qquad \alpha = 0$$

$$v_0 = 2p_0 = 2i \frac{z_0}{A - 2C} \frac{2C}{x_0}, \qquad \beta = -\frac{4C}{x_0}$$

$$r_0 = 2i, \qquad h_0 = 0$$

Для каждого целого положительного значения n шесть величин u_n, v_n, r_n, α_n, β_n, h_n должны удовлетворять следующей системе линейных уравнений:

$$\begin{aligned}
&(n-1) A u_n + i A_1 (r_0 u_n + u_0 r_n) - z_0 i \alpha_n + i x_0 h_n = U_n \\
&(n-1) A v_n - i A_1 (r_0 v_n + v_0 r_n) + z_0 i \beta_n - i x_0 h_n = V_n \\
&(n-1) C r_n + \frac{x_0 i}{2} (\alpha_n - \beta_n) = R_n \\
&(n-2) \alpha_n + r_0 i \alpha_n - i u_0 h_n + i \alpha_0 r_n - i h_0 u_n = \mathfrak{A}_n \\
&(n-2) \beta_n - r_0 i \beta_n + i v_0 h_n - i \beta_0 r_n + i h_0 v_n = \mathfrak{B}_n \\
&(n-2) h_n - \frac{i}{2} v_0 \alpha_n + \frac{i}{2} u_0 \beta_n - \frac{i}{2} \alpha_0 v_n + \frac{i}{2} \beta_0 u_n = H_n
\end{aligned}$$

Выражения $U_n, \ldots, H_n$ обозначают целые функции коэффициентов u_m, v_m, r_m, α_m, β_m, h_m, для которых $m < n$.

Если внесем в эти уравнения найденное решение величины u_0, v_0, r_0, α_0, β_0, h_0, то они значительно упростятся и примут вид

$$
\begin{aligned}
[(n-3)A+2C]\,u_n+ix_0h_n&=U_n\\
[(n+1)A-2C]\,v_n-iA_1v_0r_n+iz_0\beta_n-ix_0h_n&=V_n\\
(n-1)\,Cr_n-i\,\frac{x_0}{2}\,\beta_n&=R_n\\
(n-4)\,\alpha_n&=\mathfrak{A}_n\\
n\beta_n+iv_0h_n-i\beta_0r_n&=\mathfrak{B}_n\\
(n-2)\,h_n-\frac{i}{2}\,v_0\alpha_n+\frac{i}{2}\,\beta_0u_n&=H_n
\end{aligned}
$$

Определитель D этих последних уравнений может быть без труда вычислен непосредственно. Имеем

$$
D=(n-4)(nA+A-2C)\begin{vmatrix}(n-3)A+2C & 0 & 0 & ix_0\\ 0 & (n-1)\,C & -\frac{ix_0}{2} & 0\\ 0 & -i\beta & n & iv_0\\ \frac{i}{2}\beta_0 & 0 & 0 & n-2\end{vmatrix}=
$$

$$
=(n-4)(nA+A-2C)\,D_1
$$

$$
D_1=[(n-3)A+2C]\begin{vmatrix}(n-1)\,C & -i\,\frac{x_0}{2} & 0\\ -i\beta_0 & n & iv_0\\ 0 & 0 & n-2\end{vmatrix}-
$$

$$
-\frac{1}{2}\,\beta_0\begin{vmatrix}0 & 0 & ix_0\\ (n-1)\,C & -i\,\frac{x_0}{2} & 0\\ -i\beta_0 & n & iv_0\end{vmatrix}=
$$

$$
=\left(n\,(n-1)\,C+\frac{x_0}{2}\,\beta_0\right)\left((n-2)\,[(n-3)A+2C]+\frac{x_0}{2}\,\beta_0\right)=
$$

$$
=(n+1)(n-2)(n-3)\,C\,(nA-2A+2C)
$$

Следовательно,

$$D=(n+1)(n-2)(n-3)(n-4)C(nA+ \\ +A-2C)(nA-2A+2C)$$

Для того чтобы пять корней уравнения

$$D=0$$

были целыми положительными числами, надо, чтобы величины

$$\frac{2C}{A}-1 \quad \text{и} \quad 2-\frac{2C}{A}$$

были обе числами целыми положительными; но это, очевидно, невозможно. Только в случае $2C=A$ одна из этих величин равна нулю, другая 1. В этом случае имеем, отвлекаясь от постоянного множителя:

$$D=(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$$

Но, рассматривая предыдущие формулы, видим, что $v_0=\infty$ при $A=2C$, если только не имеем в то же время $z_0=0$. В этом случае v_0 остается неопределенным. Случай, когда $A=B=2C$, $x_0\neq 0$, $z_0=0$, есть как раз тот, который я исследовала в моем указанном выше мемуаре.

Вторая система значений, которые могут удовлетворить уравнениям, определяющим шесть величин p_0, q_0, r_0, f_0, g_0, h_0 в рассматриваемом случае $A=B$, такова (см. мой мемуар):

$$p_0=0, \qquad f_0=-\frac{2A}{x_0-iz_0}$$
$$q_0=2i, \qquad g_0=0$$
$$r_0=0, \qquad h_0=-if_0$$

где для упрощения я пишу i вместо $\varepsilon i\,(\varepsilon^2=1)$. Внеся эти величины в уравнения (6), видим, что они распадаются на две группы:

$$A(n-1)p_n-2A_1 i r_n+z_0 g_n=P_n$$
$$C(n-1)r_n-x_0 g_n=R_n$$
$$if_0 p_n+f_0 r_n+(n-2)g_n=G_n$$

и

$$A(n-1)q_n - z_0 f_n + x_0 h_n = Q_n$$
$$-f_0 q_n - 2if_n + (n-2)h_n = H_n$$
$$-if_0 q_n + (n-2)f_n + 2ih_n = F_n$$

из которых первая содержит лишь три величины p_n, r_n, g_n, в то время как вторая содержит только величины q_n, f_n, h_n. Вычислив определители каждой из этих двух групп уравнений отдельно, находим, что первый дается уравнением

$$D_1 = \frac{n-3}{x_0 - iz_0} A\{[(n^2-n+2)C - 2A]x_0 - in(n-1)Cz_0\}$$

в то время как второй имеет величину

$$D_2 = A(n+1)(n-2)(n-4)$$

Имея в виду, что постоянные A, B, C, x_0, z_0 вещественны, легко видеть, что уравнение $D = D_1 D_2 = 0$ относительно n может иметь пять корней равными целым положительным числам только в одном из двух случаев

$$A = C = B \qquad \text{или } x_0 = 0, \qquad A = B$$

Резюме: видим, следовательно, что условие, необходимое для того, чтобы ряды (2) могли представлять общие интегралы системы дифференциальных уравнений (1), выполняется только тогда, когда постоянные A, B, C, x_0, y_0, z_0 удовлетворяют одному из следующих четырех условий:

1) $A = B = C$

2) $x_0 = y_0 = z_0 = 0$

3) $A = B, \quad x_0 = y_0 = 0$

4) $A = B = 2C, \quad z_0 = 0$



МЕМУАР
ОБ ОДНОМ ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ ЗАДАЧИ О ВРАЩЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ, КОГДА ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПРОИЗВОДИТСЯ С ПОМОЩЬЮ УЛЬТРАЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ВРЕМЕНИ (4)

§ 1

Задача о вращении тяжелого тела вокруг неподвижной точки может быть, как известно, приведена к интегрированию следующей системы дифференциальных уравнений:

$$
\begin{aligned}
&A\frac{dp}{dt}=(B-C)\,qr+Mg\,(y_0\gamma''-z_0\gamma'), &\quad &\frac{d\gamma}{dt}=\gamma' r-\gamma'' q\\
&B\frac{dq}{dt}=(C-A)\,rp+Mg\,(z_0\gamma-x_0\gamma''), &\quad &\frac{d\gamma'}{dt}=\gamma'' p-\gamma r \qquad (1)\\
&C\frac{dr}{dt}=(A-B)\,pq+Mg\,(x_0\gamma'-y_0\gamma), &\quad &\frac{d\gamma''}{dt}=\gamma q-\gamma' p
\end{aligned}
$$

A, B, C обозначают главные моменты инерции движущегося тела; M есть масса движущегося тела, x_0, y_0, z_0 — координаты его центра тяжести по отношению к подвижной системе координат, начало которой совпадает с неподвижной точкой, γ, γ', γ'' — косинусы углов, которые эти три оси образуют в каждый момент времени с постоянным направлением силы тяжести.

Если эта система дифференциальных уравнений решена, то определение шести остальных косинусов, знание которых необходимо для возможности определения в каждый дан-

ный момент времени положения движущегося тела, приводится к простой квадратуре.

Система общих интегралов уравнений (1) до настоящего времени найдена только в двух случаях:

1) если предположить, что $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, т. е. что центр тяжести движущегося тела совпадает с неподвижной точкой;

2) если предположить, что $A = B$, $x_0 = y_0 = 0$.

В этих двух случаях все неизвестные задачи могут быть выражены с помощью однозначных трояко периодических функций двух переменных u и v вида $\frac{\vartheta(u+a)}{\vartheta(u)} e^{cv}$, аргументы которых u и v суть линейные функции времени. Эти функции обладают тем свойством, что они имеют только одну существенно особую точку на бесконечности, в то время как во всякой конечной области независимого переменного t они имеют только полюсы.

Можно спросить себя, сохраняется ли это последнее свойство для интегралов дифференциальных уравнений (1) в общем случае. Если бы это было так, то можно было бы проинтегрировать эти уравнения (1) с помощью рядов вида

$$
\begin{aligned}
p &= (t - t_0)^{-m_1} [p_0 + p_1 (t - t_0) + \ldots + p_m (t - t_0)^m + \ldots] \\
q &= (t - t_0)^{-m_2} [q_0 + q_1 (t - t_0) + \ldots + q_m (t - t_0)^m + \ldots] \\
r &= (t - t_0)^{-m_3} [r_0 + r_1 (t - t_0) + \ldots + r_m (t - t_0)^m + \ldots] \qquad (2) \\
\gamma &= (t - t_0)^{-n_1} [g_0 + g_1 (t - t_0) + \ldots + g_m (t - t_0)^m + \ldots] \\
\gamma' &= (t - t_0)^{-n_2} [f_0 + f_1 (t - t_0) + \ldots + f_m (t - t_0)^m + \ldots] \\
\gamma'' &= (t - t_0)^{-n_3} [h_0 + h_1 (t - t_0) + \ldots + h_m (t - t_0)^m + \ldots]
\end{aligned}
$$

где m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3 обозначают целые положительные числа.

Эти ряды должны были бы сходиться в некоторой области переменной t, и, для того чтобы они могли представлять систему общих интегралов уравнений (1), они должны были бы содержать пять произвольных постоянных.

Нужно, следовательно, начать с исследования возможности определения коэффициентов в рядах (2) таким образом, чтобы они удовлетворяли формально дифференциальным уравнениям (1) и чтобы пять из этих коэффициентов оставались произвольными.

Непосредственно находим, что для того чтобы первые члены первой и второй части уравнений (1) имели одну и ту же степень, надо положить

$$m_1 = m_2 = m_3 = 1$$
$$n_1 = n_2 = n_3 = 2$$

Затем находим, приравнивая коэффициенты при первом члене в двух частях каждого из этих уравнений и полагая для краткости

$$c_1 = Mgx_0, \qquad c_2 = Mgy_0, \qquad c_3 = Mgz_0$$
$$A_1 = B - C, \quad B_1 = C - A, \quad C_1 = A - B$$

шесть следующих соотношений:

$$\begin{aligned} -Ap_0 &= A_1 q_0 r_0 + c_2 h_0 - c_3 f_0, & -2g_0 &= r_0 f_0 - q_0 h_0 \\ -Bq_0 &= B_1 r_0 p_0 + c_3 g_0 - c_1 h_0, & -2f_0 &= p_0 h_0 - r_0 g_0 \\ -Cr_0 &= C_1 p_0 q_0 + c_1 f_0 - c_2 g_0, & -2h_0 &= q_0 g_0 - p_0 f_0 \end{aligned} \qquad (3)$$

Затем, приравнивая таким же образом коэффициенты члена с t^{m-2} в обеих частях трех первых дифференциальных уравнений (1) и коэффициенты при t^{m-3} в трех последних уравнениях, находим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} (m-1)Ap_m - A_1 r_0 q_m - A_1 q_0 r_m + c_3 f_m - c_2 h_m &= U_1 \\ -B_1 r_0 p_m + (m-1)Bq_m - B_1 p_0 r_m - c_3 g_m + c_1 h_m &= U_2 \\ -C_1 q_0 p_m - C_1 p_0 q_m + (m-1)Cr_m + c_2 g_m - c_1 f_m &= U_3 \\ h_0 q_m - f_0 r_m + (m-2)g_m - r_0 f_m + q_0 h_m &= U_4 \\ -h_0 p_m + g_0 r_m + r_0 g_m + (m-2)f_m - p_0 h_m &= U_5 \\ f_0 p_m - g_0 q_m + (m-2)r_m - q_0 g_m + p_0 f_m + (m-2)h_m &= U_6 \end{aligned} \qquad (4)$$

где $U_1, \ldots, U_6$ обозначают целые функции A, B, C, c_0, c_1, c_2, и коэффициентов $p_\mu, q_\mu, r_\mu, g_\mu, f_\mu, h_\mu$, в которых индекс μ меньше m.

Уравнения (3), вообще говоря, т. е. если не выполняются специальные соотношения между шестью величинами A, B, C, c_0, c_1, c_2, независимы между собой и, следовательно, могут быть удовлетворены лишь конечным числом систем значений шести величин $p_0, q_0, r_0, g_0, f_0, h_0$.

Уравнения (4), линейные относительно p_m, q_m, r_m, g_m, f_m, h_m, могут быть удовлетворены только одной системой значений, если только определитель системы (4) не равен нулю. Если бы этот определитель не исчезал ни для какого целого положительного значения m, то все коэффициенты рядов (2), удовлетворяющих формально уравнениям (1), были бы полностью определены. Первое необходимое условие для возможности интегрирования уравнений (1) с помощью рядов вида (2), содержащих пять произвольных коэффициентов, состоит в том, что уравнение шестой степени в m, получаемое приравниванием нулю определителя системы (4), имело пять из своих корней равными целым положительным числам.

Это и имеет место, действительно, в двух случаях, когда умеют интегрировать систему дифференциальных уравнений (1).

Так, если положим, например, $A = B$, $x_0 = y_0 = 0$, то $c_1 = c_2 = C_1 = 0$, уравнения (3) приводятся к (3a)

$$-Ap_0 + c_3 f_0 = 0, \qquad 2g_0 = q_0 h_0$$
$$-Aq_0 - c_3 g_0 = 0, \qquad 2f_0 = -p_0 h_0$$
$$r_0 = 0, \qquad 2h_0 = p_0 f_0 - q_0 g_0$$

а уравнения (4) к (4a)

$$(m-1)Ap_m - f_m = U_1, \qquad (m-2)g_m + q_0 h_m + h_0 q_m = U_4$$
$$(m-1)Aq_m - g_m = U_2, \qquad (m-2)f_m - p_0 h_m - h_0 p_m = U_5$$
$$(m-1)r_m = 0, \qquad (m-2)h_m - q_0 g_m + p_0 f_m - g_0 q_m + f_0 p_m = U_6$$

Уравнения (3а) удовлетворяются самым общим образом, если положить

$$c_3 g_0 = -A q_0, \quad c_3 f_0 = +A p_0, \quad c_3 h_0 = -2A$$

$$r_0 = 0, \quad p_0^2 - q_0^2 = -4$$

Одна из двух величин p_0, q_0 остается в этом случае неопределенной.

Внося в уравнения (4а) эти значения p_0, q_0, r_0, g_0, f_0, h_0, легко найдем, что определитель системы (4а) равен

$$A^2 (m+1) m (m-1)(m-2)(m-3)(m-4)$$

Следовательно, условие, необходимое для того, чтобы можно было проинтегрировать уравнения (1) рядами вида (2), содержащими пять произвольных коэффициентов, в самом деле выполнено в этом случае. Но это не имеет больше места в общем случае, т. е. если предполагать A, B, C, x_0, y_0, z_0 не зависящими друг от друга. Тогда находим, что уравнение 6-й степени, получаемое приравниванием нулю определителя системы (4), имеет только три корня равные целым положительным числам, в то время как три других суть алгебраические функции A, B, C, x_0, y_0, z_0.

Отыскивая соотношения, которые должны выполняться между постоянными задачи A, B, C, c_1, c_2, c_3 для того, чтобы предложенные дифференциальные уравнения могли быть формально удовлетворены рядами вида (2), содержащими необходимое число произвольных коэффициентов, я нашла, что это имеет место в случае, когда

$$A = B = 2C, \quad c_3 = 0$$

Я хочу изучить этот случай более детально ...[1]

[1] В дальнейшем изложении С. В. Ковалевская повторяет содержание *Задачи о вращении твердого тела* (стр. 155). Исключением является некоторая часть § 4 и конец § 9, которые приводятся здесь ниже.

§ 4

...Рассмотрим сначала уравнение

$$g_2^3 - 27g_3^2 = 0$$

представляющее собой биквадратное уравнение относительно величины l_0.

Для биквадратного уравнения:

$$x^4 - 2Mx^2 + N = 0$$

можно различить следующие случаи:

$M > 0,$	$N > 0,$	$M^2 - N < 0,$	четыре комплексных корня
$M > 0,$	$N > 0,$	$M^2 - N > 0,$	четыре действительных корня
$M < 0,$	$N > 0,$	$M^2 - N < 0,$	четыре комплексных корня
$M < 0,$	$N > 0,$	$M^2 - N > 0,$	четыре комплексных корня
$M > 0,$	$N < 0,$	$M^2 - N > 0,$	два действительных, два комплексных сопряженных
$M < 0,$	$N > 0,$	$M^2 - N > 0,$	два действительных, два комплексных сопряженных

Применяя эти формулы к исследованию корней уравнения $g_2^3 - 27g_3^2 = 0$, найдем, что при изучении корней уравнения $R(x) = 0$ следует различать следующие шесть случаев:

Первый случай: $l_1 > 0, \quad k_0 > 0, \quad -k_0 + 3l_1^2 < 0$

Так как четыре корня биквадратного уравнения

$$R_1(l_0) = l_0^4 - 2l_1(k_0 + l_1^2)\, l_0^2 + \frac{1}{27} k_0 (k_0 + 9l_1^2)^2 = 0$$

в этом случае комплексны, то, принимая во внимание, что

$$27l_1^2 (k_0 + l_1^2)^2 - k_0 (k_0 + 9l_1^2)^2 = (-k_0 + 3l_1^2)^3 < 0$$

количество $g_2^3 - 27g_3^2 = -27R_1(l_0)$ будет отрицательным для всех действительных значений l_0.

Следовательно, уравнение $R(x)=0$ имеет два корня действительных и два комплексных сопряженных.

Второй случай: $l_1>0, \quad k_0>0, \quad -k_0+3l_1^2>0$

Биквадратное уравнение $R_1(l_0)=0$ имеет в этом случае все корни вещественными; если положим

$$l_0'^2=l_1(k_0+l_1^2)+(-k_0+3l_1^2)^{3/2}$$
$$l_0''^2=l_1(k_0+l_1^2)-(-k_0+3l_1^2)^{3/2}$$

то количество $G=g_2^3-27g_3^2=-27R_1(l_0)$ будет отрицательным, если

$$l_0^2>l_0'^2>l''^2_0, \quad l'^2_0>l_0''^2>l_0^2$$

наоборот, G будет положительным, если $l_0'^2>l_0^2>l_0''^2$

В двух первых случаях уравнение $R(x)=0$ имеет два корня действительных и два комплексных сопряженных. В третьем случае четыре корня уравнения $R(x)=0$ действительны.

Третий случай: $l_1>0, \quad k_0<0, \quad k_0+9l_1^2>0$

Биквадратное уравнение $R_1(l_0)=0$ имеет в этом случае два корня действительных и два комплексных. Имеем

$$l'^2_0=l_1(k_0+l_1^2)+(-k_0+3l_1^2)^{3/2}>0$$
$$l_0''^2=l_1(k_0+l_1^2)-(-k_0+3l_1^2)^{3/2}>0$$

Количество $G=g_2^3-27g_3^2=-27R_1(l_0)$ отрицательно, если $l_0^2>l_0'^2$; оно положительно, если $l_0^2<l_0'^2$. Следовательно, уравнение $R(x)=0$ имеет четыре действительных корня, если

$$l_1>0, \quad k_0<0, \quad k_0+9l_1^2>0, \quad l_0^2<l_0'^2$$

и два действительных корня, если

$$l_1>0, \quad k_0<0, \quad k_0+9l_1^2>0, \quad l_0^2>l_0'^2$$

Четвертый случай: $l_1 > 0, \quad k_0 < 0, \quad k_0 + 9l_1^2 < 0$.

Так как биквадратное уравнение $R_1(l_0) = 0$ имеет два действительных корня и два комплексных, видим, что в этом случае уравнение $R(x) = 0$ имеет четыре комплексных корня, если $l_0^2 < l_0'^2$, и два действительных корня, если $l_0^2 > l_0'^2$.

Пятый случай: $l_1 < 0, \quad k_0 > 0$

Так как уравнение $R_1(l_0) = 0$ имеет в этом случае четыре комплексных корня, то количество

$$G = g_2^3 - 27g_3^2 = -27R_1(l_0)$$

отрицательно для всякого действительного значения l_0.

Следовательно, уравнение $R(x) = 0$ имеет два действительных корня и два комплексных.

Шестой случай: $l_1 < 0, \quad k_0 < 0$

Так как уравнение $R_1(l_0) = 0$ имеет в этом случае два действительных и два комплексных корня, то видим, обозначая через l_0' и $-l_0'$ действительные корни, что количество

$$G = g_2^3 - 27g_3^2 = -27R_1(l_0)$$

положительно, если l_0 находится в интервале $(-l_0' \ldots + l_0')$, но что оно отрицательно, если l_0 находится вне этого интервала. В первом случае четыре корня уравнения $R(x) = 0$ попарно комплексные сопряженные. Во втором случае два из этих корней действительны...

§ 9

... Я обратилась к господину Шварцу из Геттингена, который хорошо известен своей изобретательностью в придумывании замысловатых моделей, с просьбой дать мне образец модели, на которой можно было бы осуществить рассматриваемый случай вращения твердого тела вокруг неподвижной точки. Господин Шварц имел любезность мне тотчас же

ответить и даже предложил мне сконструировать желаемую модель с помощью своего механика в Геттингене; я не имела случая воспользоваться этим обязательным предложением, но я позволяю себе привести здесь перевод извлечения из его письма.

Извлечение из письма г. Шварца

Пусть будет R радиус основания круглого прямого цилиндра, $2H$ его высота; следовательно, его объем равен $2\pi R^2 H$. Предположим, что этот объем заполнен однородной массой M.

Момент инерции этого цилиндра относительно его оси равен $\frac{1}{2} MR^2$, а его момент инерции относительно прямой, проходящей через его центр тяжести и перпендикулярной к оси цилиндра, равен

$$M\left(\frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{3}H^2\right)$$

Теперь вообразим тело, составленное из двух подобных цилиндров, оси которых параллельны и находятся на расстоянии $2b$ одна от другой и у которых окружности оснований находятся в одной и той же плоскости и имеют одинаковые диаметры.

Пусть будет $\mathcal{A}$ момент инерции этого тела относительно главной оси инерции, перпендикулярной плоскости, проходящей через оси цилиндров; $\mathcal{B}$ — момент инерции этого тела относительно главной оси инерции, параллельной осям цилиндров; наконец, $\mathcal{C}$ есть третий главный момент инерции этого тела; тогда имеем следующие уравнения:

$$\mathcal{A} = 2M\left(\frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{3}H^2 + b^2\right)$$

$$\mathcal{B} = 2M\left(\frac{1}{2}R^2 + b^2\right)$$

$$\mathcal{C} = 2M\left(\frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{3}H^2\right)$$

Условие (необходимое по предыдущим вычислениям)

$$\mathcal{A}=2(\mathcal{B}-\mathcal{C})$$

требует, чтобы было

$$b^2=H^2-\frac{1}{4}R^2$$

Для того чтобы цилиндры не имели общей части и не касались, надо, чтобы $b>R$; необходимо, следовательно, выполнение неравенства

$$H>R\sqrt{\frac{3}{4}}$$

Тогда находим

$$a^2=\frac{\mathcal{A}-\mathcal{B}}{M}=\frac{1}{3}H^2-\frac{1}{4}R^2$$

откуда видим, что a будет вещественно, если будет выполнено уже найденное условие

$$H>R\sqrt{\frac{3}{4}}$$

Если теперь обозначим через A, B, C три главных момента инерции относительно точки оси A, которая находится на расстоянии a от центра тяжести рассматриваемого тела, то эти величины будут определяться уравнениями

$$A=\mathcal{A}=\frac{8}{3}MH^2$$

$$B=\mathcal{B}+2Ma^2=\frac{8}{3}MH^2$$

$$C=\mathcal{C}+2Ma^2=\frac{4}{3}MH^2$$

Следовательно, имеем (5)

$$A=B=2C$$

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ г. БРУНСА

В мемуаре *О некотором свойстве потенциальной функции однородных тел* (De proprietate quadam functionis potentialis corporum homogeneorum) * господин Брунс доказал следующую теорему: пусть будет T однородное твердое тело, ограниченное замкнутой поверхностью S, определяемой аналитическим уравнением $W(x, y, z) = 0$. Если обозначить через V_a аналитическую функцию, совпадающую с потенциалом T в каждой внешней точке этого тела, то эта функция может быть разложена, в окрестности каждой регулярной точки x_1, y_1, z_1 поверхности S, в ряд по целым и положительным степеням $x - x_1, y - y_1, z - z_1$. Отсюда вытекает, что эта аналитическая функция V_a существует также внутри T. Чтобы доказать эту важную теорему, господин Брунс доказывает сначала существование аналитической функции, удовлетворяющей уравнению

$$\triangle U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -4k\pi$$

и обладающей следующими свойствами:

1) на всей поверхности S имеем

$$U = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0$$

---

* Вступительная диссертация, Берлин, 1871.

2) в каждой регулярной точке поверхности S можно разложить U по целым и положительным степеням

$$x - x_1, \quad y - y_1, \quad z - z_1.$$

В настоящей заметке я займусь преобразованием дифференциального выражения ΔU к системе криволинейных координат, которая дает возможность непосредственно вывести существование подобной функции U.

Пусть будут x_1, y_1, z_1 координаты какой-нибудь точки поверхности S; ξ, η, ζ — косинусы углов, которые внешняя нормаль в этой точке s образует с осями, и положим

$$x = x_1 + \xi s$$
$$y = y_1 + \eta s$$
$$z = z_1 + \zeta s,$$

где геометрическое значение s очевидно. Координаты x_1, y_1, z_1 каждой точки поверхности S могут быть представлены как аналитические монодромные функции двух переменных u, v. Так как поверхность S не имеет ни углов, ни ребер, то ξ, η, ζ суть также монодромные функции u и v.

Следовательно, x, y, z суть монодромные функции u, v, s. Обратное, вообще говоря, не имеет места. Но всегда можно найти две замкнутые поверхности S_1 и S_2, из которых одна охватывает поверхность S, а другая охватывается ею, такие, что каждой точке пространства, ограниченного S_1 и S_2, соответствует одна и только одна система значений u, v, s, в которой модуль s не превосходит некоторой положительной величины δ.

Преобразуем выражения в частных производных ΔU к этим новым координатам u, v, s.

Хорошо известна следующая формула для этого преобразования *.

* См. Якоби (Jacobi, Gesammelte Werke, Bd 2, S. 199).

Если положим

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 =$$

$$= P\,du^2 + Q\,dv^2 + R\,ds^2 + 2\,p\,dv\,ds + 2\,q\,du\,ds + 2\,r\,du\,dv$$

$$\Omega = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial s} \end{vmatrix}$$

$$\Omega^2 E = QR - p^2, \qquad \Omega^2 e = qr - pP$$

$$\Omega^2 E_1 = RP - q^2, \qquad \Omega^2 e_1 = rp - qQ$$

$$\Omega^2 E_2 = PQ - r^2, \qquad \Omega^2 e_2 = pq - rR$$

то имеем следующие соотношения:

$$\Omega^2 = PQR - Pp^2 - Qq^2 - Rr^2 + 2\,pqr$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 = E\left(\frac{\partial U}{\partial u}\right)^2 + E_1\left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)^2 + E_2\left(\frac{\partial U}{\partial s}\right)^2 +$$

$$+ 2\,e\,\frac{\partial U}{\partial v}\frac{\partial U}{\partial s} + 2\,e_1\,\frac{\partial U}{\partial u}\frac{\partial U}{\partial s} + 2\,e_2\,\frac{\partial U}{\partial u}\frac{\partial U}{\partial v}$$

$$\Omega\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right\} = \frac{\partial}{\partial u}\left\{\Omega\left(E\,\frac{\partial U}{\partial u} + e_2\frac{\partial U}{\partial v} + e_1\,\frac{\partial U}{\partial s}\right)\right\} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial v}\left\{\Omega\left(e_2\,\frac{\partial U}{\partial u} + E_1\frac{\partial U}{\partial v} + e\,\frac{\partial U}{\partial s}\right)\right\} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial s}\left\{\Omega\left(e_1\,\frac{\partial U}{\partial u} + e\,\frac{\partial U}{\partial v} + E_2\frac{\partial U}{\partial s}\right)\right\}$$

Речь идет, следовательно, о вычислении P, Q, R, p, q, r.

Имеем

$$dx = dx_1 + s\,d\xi + \xi\,ds$$
$$dy = dy_1 + s\,d\eta + \eta\,ds$$
$$dz = dz_1 + s\,d\zeta + \zeta\,ds.$$

Так как ξ, η, ζ суть косинусы углов, которые внешняя нормаль в точке x_1, y_1, z_1 образует с осями координат, то должны иметь

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$
$$\xi\,d\xi + \eta\,d\eta + \zeta\,d\zeta = 0$$
$$\xi\,dx_1 + \eta\,dy_1 + \zeta\,dz_1 = 0$$

Следовательно,

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 + \\ + 2s(dx_1\,d\xi + dy_1\,d\eta + dz_1\,d\zeta) + s^2(d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2) + ds^2$$

Принимая обозначения Гаусса *, я полагаю

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = a, \quad \frac{\partial x_1}{\partial v} = a', \quad E = a^2 + b^2 + c^2,$$
$$\frac{\partial y_1}{\partial u} = b, \quad \frac{\partial y_1}{\partial v} = b', \quad F = aa' + bb' + cc', \qquad \omega = \sqrt{EG - F^2}$$
$$\frac{\partial z_1}{\partial u} = c, \quad \frac{\partial z_1}{\partial v} = c', \quad G = a'^2 + b'^2 + c'^2,$$

$$\alpha = \frac{\partial a}{\partial u}, \quad \alpha' = \frac{\partial a}{\partial v} = \frac{\partial a'}{\partial u}, \quad \alpha'' = \frac{\partial a'}{\partial v}$$
$$\beta = \frac{\partial b}{\partial u}, \quad \beta' = \frac{\partial b}{\partial v} = \frac{\partial b'}{\partial u}, \quad \beta'' = \frac{\partial b'}{\partial v}$$
$$\gamma = \frac{\partial c}{\partial u}, \quad \gamma' = \frac{\partial c}{\partial v} = \frac{\partial c'}{\partial u}, \quad \gamma'' = \frac{\partial c'}{\partial v}$$

---

* Общие рассуждения о кривых поверхностях (Gauss, Disquisitiones generales circa superficies curvas).

Тогда имеем

$$dx_1 = a\,du + a'dv, \qquad dy_1 = b\,du + b'dv, \qquad dz_1 = c\,du + c'dv$$

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

$$d\xi\,dx_1 + d\eta\,dy_1 + d\zeta\,dz_1 = -(\xi\,d^2x_1 + \eta\,d^2y_1 + \zeta\,d^2z_1)$$

Но

$$d^2x_1 = \alpha\,du^2 + 2\alpha'\,du\,dv + \alpha''\,dv^2$$
$$d^2y_1 = \beta\,du^2 + 2\beta'\,du\,dv + \beta''\,dv^2$$
$$d^2z_1 = \gamma\,du^2 + 2\gamma'\,du\,dv + \gamma''dv^2$$

и, полагая

$$A = bc' - cb'$$
$$B = ca' - ac'$$
$$C = ab' - ba'$$

имеем

$$\xi = \frac{A}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{A}{\omega}$$
$$\eta = \frac{B}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{B}{\omega}$$
$$\zeta = \frac{C}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{C}{\omega}$$

Следовательно, положив

$$D = A\alpha + B\beta + C\gamma$$
$$D' = A\alpha' + B\beta' + C\gamma'$$
$$D'' = A\alpha'' + B\beta'' + C\gamma''$$

имеем

$$\xi\,d^2x_1 + \eta\,d^2y_1 + \zeta\,d^2z_1 = \frac{D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2}{\omega}$$

Остается выразить через u, v величину

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2$$

Но имеем

$$d\xi = \frac{(A^2+B^2+C^2)\,dA - A\,(A\,dA + B\,dB + C\,dC)}{\omega^3}$$

$$d\eta = \frac{(A^2+B^2+C^2)\,dB - B\,(A\,dA + B\,dB + C\,dC)}{\omega^3}$$

$$d\zeta = \frac{(A^2+B^2+C^2)\,dC - C\,(A\,dA + B\,dB + C\,dC)}{\omega^3}$$

Следовательно,

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 =$$

$$= \frac{(A^2+B^2+C^2)(dA^2+dB^2+dC^2) - (A\,dA + B\,dB + C\,dC)^2}{(A^2+B^2+C^2)^2} =$$

$$= \frac{(B\,dC - C\,dB)^2 + (C\,dA - A\,dC)^2 + (A\,dB - B\,dA)^2}{(A^2+B^2+C^2)^2}$$

Но имеем

$$A = bc' - cb' \quad \text{и т. д.}$$

$$dA = (b\gamma' + c'\beta - c\beta' - b'\gamma)\,du + (b\gamma'' + c'\beta' - c\beta'' - b'\gamma')\,dv$$

и т. д.

Следовательно,

$$B\,dC - C\,dB = (D'a - Da)\,du + (D''a - D'a')\,dv$$

$$C\,dA - A\,dC = (D'b - Db)\,du + (D''b - D'b')\,dv$$

$$A\,dB - B\,dA = (D'c - Dc)\,du + (D''c - D'c')\,dv$$

и, полагая

$$L = ED'^2 - 2\,FDD' + GD^2$$

$$L' = ED'D'' - F\,(DD'' + D'^2) + GDD'$$

$$L'' = ED''^2 - 2\,FD'D'' + GD'^2$$

имеем

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = \frac{L\,du^2 + 2L'\,du\,dv + L''\,dv^2}{\omega^4}$$

Теперь все элементы, входящие в преобразованное выражение

$$dx^2 + dy^2 + dz^2$$

вычислены, и мы находим, полагая

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 =$$
$$= P\,du^2 + Q\,dv^2 + R\,ds^2 + 2\,p\,dv\,ds + 2\,q\,ds\,du + 2\,r\,du\,dv$$

$$P = E - 2s\frac{D}{\omega} + s^2\frac{L}{\omega^4}, \qquad p = 0$$

$$Q = G - 2s\frac{D''}{\omega} + s^2\frac{L''}{\omega^4}, \qquad q = 0$$

$$R = 1, \qquad r = F - 2\,s\frac{D'}{\omega} + s^2\frac{L'}{\omega^4}$$

Следовательно, полагая

$$\Omega^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial s} \end{vmatrix}^2 = PQR - Pp^2 - Qq^2 - Rr^2 + 2\,pqs$$

и определив количества E, E_1, E_2, e, e_1, e_2, как выше, имеем

$$\Omega^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left\{\Omega\left(E\frac{\partial U}{\partial u} + e_2\frac{\partial U}{\partial v} + e_1\frac{\partial U}{\partial s}\right)\right\} +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial v}\left\{\Omega\left(e_2\frac{\partial U}{\partial u} + E_1\frac{\partial U}{\partial v} + e\frac{\partial U}{\partial s}\right)\right\} +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial s}\left\{\Omega\left(e_1\frac{\partial U}{\partial u} + e\frac{\partial U}{\partial v} + E_2\frac{\partial U}{\partial s}\right)\right\}$$

Следовательно, преобразованное дифференциальное уравнение $\triangle U = -4\,k\pi$ принимает следующую форму (в силу равенства $E_2 = 1$)

$$\Omega \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} + A_1 \frac{\partial^2 U}{\partial u^2} + B_1 \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} + a_1 \frac{\partial U}{\partial u} + b_1 \frac{\partial U}{\partial v} + c_1 \frac{\partial U}{\partial s} = -4\,k\pi\Omega^2$$

Величины A_1, B_1, a_1, b_1, c_1 суть, как это видно непосредственно, целые функции второй степени s, коэффициенты которых суть функции u и v, которые в окрестности каждой системы значений u_0, v_0, соответствующей точке x_1, y_1, z_1 поверхности S, могут быть разложены в ряды по целым положительным степеням

$$u - u_0, \quad v - v_0$$

Поверхность S в рассматриваемых координатах представляется уравнением

$$s = 0$$

Функция U должна равняться нулю в каждой точке этой поверхности. То же относится ко всем ее производным первого порядка.

Если коэффициент Ω при $\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}$ в преобразованном дифференциальном уравнении не равен нулю ни для какой системы значений u_0, v_0, соответствующей некоторой точке поверхности S, то будет существовать единственная функция U, удовлетворяющая условию

$$(U)_{s=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial s}\right)_{s=0} = 0$$

и эта функция может быть представлена сходящимся рядом *, расположенным по целым положительным степеням.

---

* См. мой мемуар „К теории уравнений в частных производных“ (Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Journal für Mathematik, Bd 80).

Это будет, очевидно, та функция, которую мы ищем. Поэтому нужно более внимательно исследовать величину Ω.

Имеем

$$\Omega^2 = PQ - r^2 =$$

$$= \left(E - 2s\frac{D}{\omega} + s^2\frac{L}{\omega^4}\right)\left(G - 2s\frac{D''}{\omega} + s^2\frac{L''}{\omega^4}\right) - \left(F - 2s\frac{D'}{\omega} + s^2\frac{L'}{\omega^4}\right)^2 =$$

$$= EG - F^2 - \frac{2s}{\omega}(ED'' - 2FD' + GD) +$$

$$+ \frac{s^2}{\omega^4}[EL'' - 2FL' + GL + 4\omega^2(DD'' - D'^2)] -$$

$$- 2\frac{s^3}{\omega^5}(LD'' - 2L'D' + L''D) + \frac{s^4}{\omega^8}(LL'' - L'^2)$$

Обозначая через ρ_1 и ρ_2 оба радиуса кривизны в точке поверхности с координатами x_1, y_1, z_1, имеем

$$\frac{1}{\rho_1\rho_2} = \frac{DD'' - D'^2}{\omega^4}, \qquad \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{ED'' - 2FD' + GD}{\omega^3}$$

Кроме того, легко находим следующие соотношения:

$$EL'' - 2FL' + GL = (ED'' - 2FD' + GD)^2 -$$
$$- 2(EG - F^2)(DD'' - D'^2)$$

$$LD'' - 2L'D' + L''D = (ED'' - 2FD' + GD)(DD'' - D'^2)$$

$$LL'' - L'^2 = (EG - F^2)(DD'' - D'^2)^2$$

Внеся эти величины в выражение для Ω, находим

$$\Omega^2 = \omega^2\left[1 - 2s\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) + s^2\left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} + \frac{4}{\rho_1\rho_2}\right) -\right.$$

$$\left. - \frac{2s^3}{\rho_1\rho_2}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) + \frac{s^4}{\rho_1^2\rho_2^2}\right] = \omega^2\left(1 - \frac{s}{\rho_1}\right)^2\left(1 - \frac{s}{\rho_2}\right)^2$$

Ни величина $\omega = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, ни какой-либо из радиусов кривизны ρ_1, ρ_2 не могут равняться нулю в точке поверхности, для которой направление нормали определено. Следовательно, Ω не равняется нулю ни для какой системы значений s_0, u_0, v_0 такой, что модуль s_0 меньше некоторого определенного количества δ и что величинам u_0, v_0 соответствует определенная точка x_1, y_1, z_1 поверхности S. Следовательно, $\frac{1}{\Omega}$ может быть разложено по целым положительным степеням $u - u_0$, $v - v_0$, $s - s_0$. Но системе значений s_0, u_0, v_0 соответствует точка x, y, z, заключенная в области θ, ограниченной поверхностями S_1 и S_2. Так как в окрестности каждой из этих точек величины $u - u_0$, $v - v_0$, $s - s_0$ можно разложить по целым положительным степеням $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, то функция U также может быть представлена таким же рядом.

Ч. и т. д.

ПРИЛОЖЕНИЯ





Приложение I

К СТАТЬЕ „К ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ"

1. Функция называется *регулярной* (правильной, или голоморфной, или аналитической) в окрестности точки $x = a$, если она разлагается в ряд по целым положительным степеням разности $x - a$, сходящийся для всех x, для которых $|x - a| < \delta$, где δ — положительное число.

Если аналитическая функция представлена степенным рядом по степеням $x - a$, то с помощью *аналитического продолжения* можно найти любое число других степенных рядов, которые определяют значение функции в области, к любой точке которой можно подойти из a, не переходя особой точки функции. По Вейерштрассу аналитическую функцию можно определить некоторым степенным рядом и всеми другими степенными рядами (*регулярными ветвями* функции), которые могут быть получены из него процессом аналитического продолжения.

Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется *регулярной* (правильной, голоморфной) в окрестности точки $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, если она разлагается в ряд по целым положительным степеням разностей $x_1 - a_1, x_2 - a_2, \ldots, x_n - a_n$, для всех значений $x_1, \ldots, x_n$ таких, что $|x_i - a_i| < \delta$; говорят при этом, что точка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принадлежит области точки $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ радиуса δ.

2. Работ Коши С. В. Ковалевская, повидимому, не знала. См. [8] стр. 11 и здесь ниже 6.

3. Сходящийся ряд называется *безусловно* сходящимся, если он остается сходящимся при любой перестановке его членов, причем его сумма не изменяется от этой перестановки; в противном случае сходящийся ряд называется *условно* сходящимся. Доказано, что всякий абсолютно сходящийся ряд есть безусловно сходящийся, а не абсолютно

сходящийся сходится лишь условно, поэтому безусловная сходимость совпадает с абсолютной сходимостью.

4. Пуанкаре [10] (стр. 14) указывает, что Коши принимает в качестве мажорантной функции для голоморфной функции $f(x, y, z)$ выражение вида

$$\frac{M}{(1-\alpha x)(1-\beta y)(1-\gamma z)}$$

где M, α, β, γ выбираются так, чтобы каждый коэффициент этого выражения был больше абсолютного значения соответствующего коэффициента разложения $f(x, y, z)$; Вейерштрассу же принадлежит введение мажоранты вида

$$\frac{M}{1-\alpha(x+y+z)}$$

5. Этот пример С. В. Ковалевской был высоко оценен Вейерштрассом и Миттаг-Леффлером (см. ниже стр. 345).

6. С. В. Ковалевская доказала теорему существования и единственности голоморфного решения задачи Коши для системы уравнений в частных производных нормального вида. Коши уже в 1842 г. в четырех мемуарах [6] дал теорему существования для линейной системы уравнений в частных производных и указал, как привести к этому виду нелинейную систему [8]. С. В. Ковалевская не знала этих работ Коши, а так же и тех, которые относятся к теореме существования голоморфного решения для обыкновенных дифференциальных уравнений. Адамар [8], говоря о теореме Коши — Ковалевской, выражает удивление по поводу того, что теорему, относящуюся к обыкновенным уравнениям, она считает принадлежащей Вейерштрассу, а не Коши. Доказательство Ковалевской проще доказательства Коши; по словам Пуанкаре, [10] С. В. Ковалевская дала теореме окончательную форму.

Гурса [1,7] доказывает теорему Коши—Ковалевской, приводя общий случай к случаю произвольной системы первого порядка.

В четвертом томе Курса высшей математики В. И. Смирнова [4] имеется общая формулировка теоремы Коши—Ковалевской (стр. 514) и приведено доказательство этой теоремы для одного уравнения в частных производных первого порядка (стр. 508).

Теорема не применима к системам не нормального вида. Рассмотрению общих систем уравнений в частных производных любого порядка с любым числом независимых переменных и неизвестных функций с точки зрения существования аналитических решений посвящен ряд работ (см. Гюнтер [2], Рикье [10] и Жане [9]).

Много работ, и в особенности русских ученых, посвящено различным обобщениям теоремы Ковалевской: рассмотрены некоторые случаи неаналитических функций и неаналитических решений, вопросы о единственности решения во всей области его существования и т. д. (см. обзорную статью И. Г. Петровского [3]).

С точки зрения математической физики задача Коши, как теперь выяснилось, имеет смысл не для всяких систем, но лишь для гиперболических, для которых она поставлена „корректно“.

Задача считается корректно поставленной в том случае, когда малым изменениям начальных или граничных условий (т. е. малым погрешностям в последних) соответствуют малые изменения решения уравнения. Более точно[5] говорят, что задача поставлена корректно, если существует область независимых переменных, в которой имеется единственное решение задачи, зависящее непрерывным образом от начальных и граничных условий (понятие непрерывности должно быть определено специально); в противном случае говорят, что задача поставлена некорректно. Для корректно поставленной задачи решение обладает определенного рода устойчивостью (непрерывная зависимость от начальных данных для обыкновенных дифференциальных уравнений в бесконечной области носит название „устойчивости по Ляпунову“).

Известно, что для уравнения Лапласа задача Коши поставлена некорректно, о чем свидетельствует пример Адамара: единственное решение в полуплоскости $y > 0$, удовлетворяющее условиям Коши

$$u\Big|_{y=0} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = e^{-\sqrt{n}}\cos nx$$

есть

$$u = \frac{1}{n}\, e^{-\sqrt{n}}\operatorname{sh} ny \cos nx$$

Это решение неограниченно растет вместе с n, в то время как граничная функция

$$e^{-\sqrt{n}} \cos nx$$

равномерно стремится к нулю вместе со всеми своими производными. Поэтому для уравнения Лапласа можно сколь угодно малым изменением начальных значений u и $\partial u / \partial y$ сколь угодно сильно изменить решение задачи Коши в произвольной близости от прямой $y = 0$, для чего достаточно лишь к этому решению прибавить решение Адамара[3]. Поэтому решение задачи Коши не имеет физического интереса для уравнения Лапласа (и вообще для уравнений эллиптического типа), но представляет интерес для уравнений гиперболического типа (у кото-

рых существуют действительные характеристики; самое понятие о характеристиках вытекает из рассмотрения задачи Коши).

Что касается краевых задач математической физики, то физически поставленные задачи являются вместе с тем и корректно поставленными [5].

Вопросу о корректности постановки задачи Коши для систем уравнений посвящены многочисленные исследования русских ученых [2,3,5].

Литература

1. Гурса Э. Курс математического анализа. Перевод, ГОНТИ, М. — Л., 1936, т. II.
2. Гюнтер Н. М. Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. ГОНТИ, М. — Л., 1934.
3. Петровский И. Г. О некоторых проблемах теории уравнений с частными производными. Успехи математических наук, новая серия, М. — Л., 1946, т. I, вып. 3—4 (13—14), стр. 44—70.
4. Смирнов В. И. Курс высшей математики. ГОНТИ, Л. — М., 1941, т. IV.
5. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. ОГИЗ. М.—Л., 1947.
6. Cauchy A. Note sur certaines solutions complètes d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre. Comptes Rendus. Paris, 1842, v. XIV, p. 1026—1028, v. XV, p. 44, 85, 131.
7. Goursat E. Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris, 1891.
8. Hadamard J. Le problème de Cauchy. Paris, 1932.
9 Janet M. Leçons sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles. Paris, 1929.
10. Poincaré H. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. Acta math., 1890, t. 13, p. 1—270.
11. Riquier Ch. Les systèmes d'équations aux dérivées partielles. Paris, 1910.



Приложение II

К СТАТЬЕ „О ПРИВЕДЕНИИ НЕКОТОРОГО КЛАССА АБЕЛЕВЫХ ИНТЕГРАЛОВ"

1. Абелевым интегралом называется интеграл вида

$$\int F(x, y)\, dx \tag{1}$$

где F — рациональная функция x и y, причем x и y связаны уравнением

$$f(x, y) = 0 \tag{2}$$

где f — неприводимый полином от x, y (т. е. не разлагающийся на произведение полиномов). Введя обозначение

$$\psi(x,y) = f'_y F(x, y)$$

можно представить абелев интеграл в виде

$$\int \frac{\psi(x, y)\, dx}{f_y'(x, y)} \tag{3}$$

2. Абелев интеграл называется интегралом *первого рода*, если он конечен на всей плоскости комплексного переменного x (или для всех точек x, y римановой поверхности), интегралом *второго рода*, если он имеет алгебраические бесконечности, и *третьего рода*, если имеет логарифмические бесконечности.

Если уравнение (2) имеет вид

$$y^2 - R(x) = 0 \tag{4}$$

где $R(x)$ — полином выше 4-й степени, то интеграл (3) называется ги-

перэллиптическим. Можно считать степень $R(x)$ четной, равной $2p+2$ (случай нечетной степени дробно-линейной подстановкой приводится к предыдущему; в этом случае к $2p+1$ критических точек нужно присоединить еще бесконечно удаленную).

С помощью алгебраических преобразований, приводящих к выделению алгебраической части из интеграла (3), гиперэллиптический интеграл можно привести к линейной комбинации интегралов вида

$$u_{\mu+1} = \int \frac{x^{\mu}\,dx}{\sqrt{R(x)}} \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots, 2p-1) \tag{5}$$

$$u = \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R(x)}} \tag{6}$$

При $\mu = 0, 1, \ldots, p-1$ имеем абелевы интегралы первого рода, при $\mu = p, p+1, \ldots, 2p-1$ — второго рода. Интеграл (6) третьего рода.

3. Гиперэллиптический интеграл первого рода имеет вид

$$\int \frac{c_1 + c_2 x + \ldots + c_p x^{p-1}}{\sqrt{R(x)}}\,dx$$

и, следовательно, представляет линейную комбинацию p линейно независимых интегралов (5), $u_1, u_2, \ldots, u_p$.

4. *Ранг* ρ (Rang) по Вейерштрассу соответствует тому, что Риман назвал *родом* (Geschlecht), Кремона — *жанром* (genere, genre). Теперь это число обычно называют жанром и обозначают через p (по Риману). (Определение ранга по Вейерштрассу см. [11], стр. 506).

Род (ранг) кривой n-го порядка [12] есть число, на которое отличается действительное число двойных точек кривой от максимального числа, возможного для кривой этого порядка; при $\rho=0$ алгебраическая кривая имеет наибольшее число двойных точек, свойственное ее порядку, а именно $1/2\,(n-1)(n-2)$.

Жанром алгебрической функции (2) называется число дыр в канонической поверхности Римана [1], соответствующей уравнению (2).

Пусть уравнение (2) будет степени n относительно y, и пусть на плоскоскости x имеем m *критических* точек функции y, т. е. таких значений x, для которых y в уравнении (2) имеет кратные корни: $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Представим уравнение (2) в развернутом виде:

$$f(x, y) = \varphi_0(x)\,y^n + \varphi_1(x)y^{n-1} + \cdots + \varphi_n(x) = 0 \tag{2'}$$

где $\varphi_k(x)$ — полиномы.

Критические точки определяются исключением y из уравнений

$$f(x, y) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

(а также приравниванием нулю коэффициента $\varphi_0(x)$ при y^n).

Если x и y вещественны и уравнение (2) рассматривается как уравнение кривой на плоскости, то критические точки алгебраической функции y от x соответствуют: 1) точкам кривой, в которых касательная параллельна оси y; 2) кратным точкам кривой, т. е. точкам, в которых одновременно

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

(это следует из выражения для производной неявной функции).

Если в точке a_k уравнение (2) имеет для y корень b_k кратности q, то q корней, близких к b_k, для значений x, близких к a_k, образуют одну или несколько *циклических систем*. Говорят, что p корней $y_1, \ldots, y_p$ образуют циклическую систему, если при обходе вокруг критической точки корень (ветвь алгебраической функции) y_1 переходит в y_2, при следующем обходе корень y_2 переходит в y_3 и т. д., наконец, при p-м обходе мы возвращаемся к исходному корню y_1.

Теперь отметим на плоскости комплексного переменного x все критические точки: $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Построим риманову поверхность наложения, состоящую из n наложенных друг на друга плоскостей. Обыкновенной точке уравнения (2) соответствует n различных значений y; сопоставим i-му листу i-ю ветвь функции y_i. Над точкой a_k плоскости x на поверхности Римана лежат n точек. Пусть q_1 этих точек, рассматриваемых как одна точка a_{k_1}, дают цикл, соединяющий q_1 листов, тогда точка a_{k_1} называется точкой разветвления порядка $q_1 - 1$. Пусть далее имеем цикл, соединяющий q_2 листов,..., наконец, цикл из q_{n_k} листов, так что точке a_k соответствует n_k точек разветвления на римановой поверхности. Тогда для жанра (или ранга) p алгебраической функции y имеет место следующая основная формула Римана:

$$p = \frac{\Sigma(q-1)}{2} - n + 1 \tag{7}$$

где суммирование ведется по всем q_i, для всех критических точек.

Для гиперэллиптических интегралов, согласно уравнению (4), имеем $n = 2$ (два листа римановой поверхности) и все $q_i = 2$, так как двукратный обход критической точки возвращает ветвь функции к ее исходному значению. Поэтому, если $R(x)$ есть полином степени $2p + 2$

или $2p+1$, так как в этом случае к $2p+1$ критических точек нужно еще прибавить бесконечно далекую), правая часть формулы Римана (7) дает как раз p для уравнения (4).

Таким образом, для гиперэллиптического интеграла с 7 или 8 особыми точками ранг или жанр равняется 3. Общее выражение такого интеграла первого рода имеет вид

$$\int \frac{c_0 + c_2\xi + c_2\xi^2}{\sqrt{R(\xi)}}\, d\xi$$

где $R(\xi)$ есть целый полином 7-й или 8-й степени.

5. Как известно, обращение эллиптического интеграла первого рода

$$u = \int\limits_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

дает двояко-периодическую функцию $\operatorname{sn} u$, имеющую периодом любое число вида

$$\Omega = 2m\omega + 2n\omega'$$

где m и n — произвольные целые числа, а 2ω и $2\omega'$ — основные периоды. (При этом $\omega = 2K$, $\omega' = K'$, где K и K' — полные эллиптические интегралы первого рода, соответствующие модулям k и $k' = \sqrt{1-k^2}$.)

Значение эллиптического интеграла первого рода, взятого по замкнутой кривой, равно периоду

$$\int\limits_c \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = 2m\omega + 2n\omega'$$

Числа m и n указывают, на сколько раз больше путь интегрирования пересекает соответствующий основной разрез с отрицательной стороны на положительную, чем в обратном направлении. За основные разрезы принимаются разрезы по сторонам основного параллелограма периодов, причем одна из параллельных сторон считается положительной, другая отрицательной. Путем сгибания параллелограма периодов получается каноническая форма римановой поверхности — в данном случае тор (см. [2], стр. 318).

Аналогичные обстоятельства имеют место для любого абелева интеграла. Так, каждый из интегралов $u_1, u_2, \ldots, u_\rho$ стр. 55 имеет 2ρ основных периодов, а вся система ρ линейно независимых интегралов первого рода имеет 2ρ систем основных периодов (см. ниже примечание 8).

6. О преобразовании k-й степени (или порядка) см.[10], гл. XI. О преобразовании ϑ-функций одного аргумента см. Гурвиц [2], ч. II, гл. VII.

7. Здесь (ω) — определитель из элементов $\omega_{\alpha\beta}$, а $(\omega)_{\alpha\beta}$ — алгебраическое дополнение элемента $\omega_{\alpha\beta}$.

8. *Тета-функция* от одной переменной u определяется рядом

$$\vartheta(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{an^2 + 2nu} \tag{8}$$

u называется аргументом функции ϑ, величина $a = r + is$ должна для сходимости ряда (8) иметь $r < 0$; величина a называется модулем тета-функции.

Если положить

$$u = \pi i v, \quad a = \pi i \tau$$

то получим

$$\vartheta(v \mid \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{(n^2\tau + 2vn)\pi i}$$

т. е. первое из равенств (6), приведенных в мемуаре С. Ковалевской. Остальные три равенства (6) служат определениями тета-функций ϑ_k с номерами $k = 0, 1, 2$.

Тета-функцией ρ *аргументов* $u_1, u_2, \ldots, u_\rho$ называется функция, определяемая с помощью ряда

$$\vartheta(u_1, u_2, \ldots, u_\rho) = \sum_{n_1, \ldots, n_\rho}^{-\infty \ldots \infty} e^{\sum_{s=1}^{\rho} \sum_{\sigma=1}^{\rho} a_{s\sigma} n_s n_\sigma + 2\sum_{s=1}^{\rho} n_s u_s}$$

Входящие в этот ряд $\frac{1}{2}\rho(\rho+1)$ величин $a_{s\sigma} = a_{\sigma s}$ $(s, \sigma = 1, 2, \ldots, \rho)$ называются модулями тета-функции. Они должны быть выбраны так, чтобы удовлетворялось условие, необходимое и достаточное для сходимости тета-ряда, состоящее в том, что квадратичная форма, составленная из действительных частей $r_{s\sigma}$ модулей тета-функции

$$\sum_{s=1}^{\rho} \sum_{\sigma=1}^{\rho} r_{s\sigma} x_s x_\sigma$$

есть отрицательно определенная форма (см.[6] стр. 296).

Тета-функция ρ аргументов удовлетворяет равенству

$$\vartheta\left(u_1 + \sum_{\sigma=1}^{\rho} k_\sigma a_{1\sigma} + l_1 \pi i, \ldots, u_\rho + \sum_{\sigma=1}^{\rho} k_\sigma a_{\rho\sigma} + l_\rho \pi i\right) =$$

$$= e^{\sum\limits_{s=1}^{\rho}\sum\limits_{\sigma=1}^{\rho} a_{s\sigma} k_s k_\sigma - 2\sum\limits_{s=1}^{\rho} k_s u_s} \vartheta(u_1, \ldots, u_\rho)$$

в котором $k_1, \ldots, k_\rho, l_1, \ldots, l_\rho$ — произвольные целые числа.

Из этого уравнения, положив один раз $l_\nu = 1$, а все остальные l и ρ чисел k равными нулю, другой раз $k_\nu = 1$, а остальные k и все l равными нулю, получаем специальные уравнения

$$\vartheta(u_1, \ldots, u_\nu + \pi i, \ldots, u_\rho) = \vartheta(u_1, \ldots, u_\nu, \ldots, u_\rho) \tag{9}$$

$$\vartheta(u_1 + a_{1\nu}, \ldots, u_\rho + a_{\rho\nu}) = \vartheta(u_1, \ldots, u_\rho)\, e^{-a_{\nu\nu} - 2u_\nu} \tag{10}$$

В 2ρ уравнений, которые получаются из равенств (9) и (10) при $\nu = 1, 2, \ldots, \rho$, входит в левых частях 2ρ систем величин

$$\begin{matrix} \pi i & 0 \ldots 0 & a_{11} & a_{21} \ldots a_{\rho 1} \\ 0 & \pi i \ldots 0 & a_{12} & a_{22} \ldots a_{\rho 2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots \pi i & a_{1\rho} & a_{2\rho} \ldots a_{\rho\rho} \end{matrix}$$

Они называются 2ρ системами периодов (или модулей периодичности) тета-функции.

Если положить

$$u_k = \pi i v_k, \quad a_{lk} = \pi i \tau_{lk}$$

то получим тета-функцию

$$\vartheta(v_1, \ldots, v_\rho \mid \tau_{11}, \ldots, \tau_{\rho\rho}) = \tag{11}$$

$$= \sum e^{[n_1(2v_1 + n_1\tau_{11} + n_2\tau_{12} + \ldots + n_\rho \tau_{1\rho}) + \ldots + n_\rho(2v_\rho + n_1\tau_{\rho 1} + \ldots + n_\rho \tau_{\rho\rho})]\pi i}$$

имеющую основную систему периодов, приведенную в статье Ковалевской.

Функция (11) удовлетворяет для любых целых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_\rho$ уравнениям

$$\vartheta(v_1 + p_1, v_2 + p_2, \ldots, v_\rho + p_\rho) = \vartheta(v_1, v_2, \ldots, v_\rho)$$
$$\vartheta(v_1 + \tau_{1\alpha}, v_2 + \tau_{2\alpha}, \ldots, v_\rho + \tau_{\rho\alpha}) = e^{-(2v_\alpha + \tau_{\alpha\alpha})\pi i}\, \vartheta(v_1, \ldots, v_\rho) \tag{12}$$

9. Та часть мемуара Кенигсбергера, на которую здесь ссылается Ковалевская, изложена ею в § 6 ее работы „Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки“ (см. стр. 203). В дополнение к § 6 мемуара Ковалевской мы приводим здесь схему из статьи Кенигсбергера, опущенную Ковалевской:

	m_1^λ	m_2^λ	...	m_ρ^λ	n_1^λ	n_2^λ	...	n_ρ^λ
$\lambda = 0$	-1	-1	...	-1	0	0	...	0
$\lambda = 1$	-1	-1	...	-1	1	0	...	0
$\lambda = 2$	0	-1	...	-1	1	0	...	0
$\lambda = 3$	0	-1	...	-1	0	1	...	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$\lambda = \rho$	0	0	...	0	0	0	...	1

Кроме того, для представления о стиле изложения теории абелевых функций в период научной деятельности С. В. Ковалевской здесь приводится перевод введения Вейерштрасса к лекциям по теории абелевых функций [14] (за исключением исторической части этого введения).

К. Вейерштрасс

Введение

В теории абелевых трансцендент следует отличать интегралы от функций в узком смысле слова, подобно тому как это имеет место в теории эллиптических трансцендент.

Интеграл от алгебраической функции одной переменной называют по предложению Якоби абелевым интегралом, так как Абель впервые обнаружил важнейшие свойства этого интеграла для случая произвольной алгебраической иррациональности.

Если y определена как алгебраическая функция от x с помощью некоторого неприводимого алгебраического уравнения $f(x, y) = 0$, то мы будем рассматривать одновременно с функцией y все рациональные

функции $R(x, y)$ обоих аргументов, x и y, связанных указанным уравнением, и исследуем затем абелевы интегралы вида

$$\int R(xy)\,dx$$

Пусть теперь $(a\,b)$ есть произвольная пара чисел, удовлетворяющая алгебраическому уравнению $f(x, y) = 0$, тогда можно, как мы дальше увидим, все пары значений $(x\ y)$, удовлетворяющие уравнению и лежащие в окрестности пары $(a\,b)$, т. е. для которых абсолютные значения разностей $x - a$ и $y - b$ не превосходят достаточно малую положительную величину, представить двумя рядами по степеням независимой переменной t:

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

так, что каждой такой паре значений $(x\,y)$ соответствует только одно значение t.

Совокупность определенных таким образом пар значений $(\varphi(t), \psi(t))$ мы назовем элементом алгебраического образа, определенного уравнением

$$f(x, y) = 0$$

Только для отдельных особых пар значений $(a\,b)$ образа требуется несколько пар функций $(\varphi(t), \psi(t))$ для представления всех пар значений (xy), удовлетворяющих уравнению и лежащих в окрестности $(a\,b)$.

Так как по данному уравнению $f(x, y) = 0$ каждому значению x соответствует несколько значений y, то в определении абелева интеграла между заданными границами встретится неопределенность, если в обоих пределах будут заданы только значения x_0 и x_1 переменной x; одновременно должны быть однозначно фиксированы оба соответствующих значения y_0 и y_1 другой переменной y.

При этом в абелевом интеграле между определенными пределами

$$\int_{(x_0 y_0)}^{(x_1 y_1)} R(x\,y)\,dx$$

пределы $(x_0\,y_0)$ и $(x_1\,y_1)$ должны принадлежать одному и тому же элементу образа. Из уравнений

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

получается при $t = t_0$ пара значений $(x_0 y_0)$ и при $t = t_1$ пара значений $(x_1 y_1)$, а дифференциал $R(xy)\,dx$ переходит при подстановке $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ в $g(t)\,dt$.

Тогда, если при разложении $g(t)$ по степеням t не входит член вида ct^{-1}, то мы полагаем

$$\int_{(x_0 y_0)}^{(x_1 y_1)} R(x\,y)\,dx = h(t_1) - h(t_0)$$

причем функция $h(t)$ — должна удовлетворять уравнению

$$g(t)\,dt = dh(t)$$

Следовательно, в этом случае интеграл есть однозначная функция t_0 и t_1 или пар значений $(x_0 y_0)$ и $(x_1 y_1)$. Если же $g(t)$ содержит член вида ct^{-1}, то пусть

$$g(t) = ct^{-1} + g_1(t)$$

и

$$g_1(t)\,dt = dh_1(t)$$

При этом будет

$$\int_{(x_0 y_0)}^{(x_1 y_1)} R(xy)\,dx = c \log \frac{t_1}{t_0} + h_1(t_1) - h_1(t_0)$$

Тогда вследствие входящего в правую часть логарифма интеграл представляет бесконечно многозначную функцию t_0 и t_1 или пар значений $(x_0 y_0)$ и $(x_1 y_1)$. При этом абелеву интегралу приписывается определенный смысл, если пределы его принадлежат одному и тому же элементу образа, определяемого уравнением $f(x, y) = 0$.

Если это не имеет места, то мы можем, как дальше будет показано, вставить между парами чисел $(x_0 y_0)$ и $(x_1 y_1)$ конечное число пар значений $(x' y')$, $(x'' y'')$, . . ., $(x^{(r)} y^{(r)})$ таким образом, чтобы каждые две соседние пары принадлежали одному элементу. Тогда мы определяем значение интеграла

$$\int_{(x_0 y_0)}^{(x_1 y_1)} R(xy)\,dx$$

значением суммы

$$\int_{(x_0 y_0)}^{(x' y')} R(xy)\,dx + \int_{(x' y')}^{(x'' y'')} R(xy)\,dx + \ldots + \int_{(x^{(r)} y^{(r)})}^{(x_1 y_1)} R(xy)\,dx$$

в которой каждый интеграл, по предыдущему, имеет определенное значение.

Мы не можем теперь больше говорить, что значение интеграла

$$\int_{(x_0 y_0)}^{(x_1 y_1)} R(xy)\,dx$$

определяется значением его пределов $(x_0 y_0)$ и $(x_1\ y_1)$, так как оно теперь зависит еще от пути интегрирования, т. е. от пар чисел

$$(x'\,y'),\quad (x''\,y''),\ldots,(x^{(r)}\,y^{(r)})$$

включенных для связи между пределами $(x_0\,y_0)$ и $(x_1\,y_1)$.

Но мы увидим, что каждое из бесчисленного множества значений принимаемых интегралом

$$\int_{(x_0 y_0)}^{(x_1 y_1)} R(xy)\,dx$$

при установленных границах $(x_0\,y_0)$ и $(x_1\,y_1)$ отличается от любого из этих значений только на период, т. е. на выражение вида

$$2m\omega + 2\,m'\,\omega' + 2m''\,\omega'' + \ldots$$

в котором $m, m', m'', \ldots$ суть целые числа или нули, а 2ω, $2\omega'$, $2\omega''$, ... обозначают конечное число постоянных, зависящих только от уравнения $f(x, y) = 0$ алгебраического образа и входящей в интеграл рациональной функции $R(xy)$, но не от пределов интеграла $(x_0\,y_0)$ и $(x_1\,y_1)$. Эти величины 2ω, $2\omega'$, $2\omega''$, ... образуют так называемую основную систему периодов интеграла, если они выбраны так, что каждый период интеграла составляется из них с помощью сложения и вычитания, в то время как никакой из них не может быть образован подобным образом из остальных.

Если пара значений, образующих верхний предел интеграла, совпадает с парой, образующей нижний предел, то мы называем путь интегрирования замкнутым; всегда можно найти такие замкнутые пути интегрирования, что взятый по ним интеграл $\int R(xy)\,dx$ принимает одно из значений 2ω, $2\omega'$, $2\omega''$,... . Таким образом, мы получаем основную систему периодов введением некоторого числа интегралов по замкнутым путям интегрирования.

При одновременном рассмотрении нескольких абелевых интегралов, принадлежащих одному и тому же алгебраическому уравнению $f(x, y) = 0$, подобным же образом устанавливается понятие основной системы совместных периодов.

Абелевы интегралы распадаются, так же как эллиптические, на интегралы трех родов, которые отличаются тем, что они различным образом обращаются в бесконечность.

Каждому неприводимому алгебраическому уравнению $f(x, y) = 0$ соответствует некоторое характеристическое число ρ, целое положительное или равное нулю, которое мы назовем рангом алгебраического образа, определяемого этим уравнением. Мы увидим, каким образом это число ρ может быть выведено из свойств образа. Для каждого алгебраического образа ранг совпадает с числом принадлежащих ему 2ρ линейно независимых интегралов первого рода

$$\int H(xy)_\alpha dx, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \rho)$$

последние же обладают основной системой 2ρ совместных периодов

$$2\omega_{\alpha 1}, 2\omega_{\alpha 2}, \ldots, 2\omega_{\alpha\rho}; \quad 2\omega'_{\alpha 1}; 2\omega'_{\alpha 2}, \ldots, 2\omega'_{\alpha\rho} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \rho)$$

Свойства абелевых интегралов представляют полную аналогию со свойствами эллиптических интегралов, и на самом деле последние содержатся среди первых как частный случай. Чтобы получить эллиптические интегралы, мы можем определить алгебраический образ с помощью уравнения

$$y^2 - R(x) = 0$$

где под $R(x)$ понимается целая рациональная функция третьей или четвертой степени от x; тогда число ρ, определенное как ранг образа, равно 1. Если же $R(x)$ есть целая рациональная функция степени выше четвертой, то мы называем абелевы интегралы, происходящие от уравнения

$$y^2 - R(x) = 0$$

специально гиперэллиптическими интегралами. Для того чтобы ранг гиперэллиптического образа $y^2 - R(x) = 0$ равнялся определенному числу ρ, целая рациональная функция $R(x)$ должна не иметь одинаковых множителей и должна быть степени $2\rho + 1$ или $2\rho + 2$.

В теории эллиптических интегралов большое значение имеет теорема Эйлера, особенно потому, что, исходя из нее, можно построить полную теорию эллиптических функций. Теорема гласит, что сумма двух эллиптических интегралов первого рода может быть выражена одним интегралом того же рода, верхний предел которого зависит алгебраически от верхних пределов обоих данных интегралов. Если мы примем между x и y алгебраическое уравнение

$$y^2 = (1 - x^2)(1 - k^2 x^2)$$

и обозначим через $(x_1 y_1)$ и $(x_2 y_2)$ две произвольные пары значений, связанных этим уравнением, то будем иметь уравнение

$$\int_{(01)}^{(x_1 y_1)} \frac{dx}{y} + \int_{(01)}^{(x_2 y_2)} \frac{dx}{y} = \int_{(01)}^{(x' y')} \frac{dx}{y}$$

для которого в паре значений $(x' y')$ как x', так и y' есть рациональная функция x_1, y_1, x_2, y_2, а именно, x' дается уравнением

$$x' = \frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{1 - k^2 x_1^2 x_2^2}$$

обратно, x_1 и y_1 также представляются рациональными функциями от переменных x', y', x_2, y_2.

Если мы определим из дифференциального уравнения

$$du = \frac{dx_1}{y_1}$$

x_1 как функцию от u при добавочном условии, что x_1 исчезает при $u = 0$, а производная dx_1 / du при $u = 0$ принимает значение $+1$, то из теоремы Эйлера следует, что эта функция, которую мы обозначим через $\varphi(u)$, для произвольных, достаточно малых по абсолютному значению аргументов u и v, удовлетворяет функциональному уравнению

$$\varphi(u + v) = \frac{\varphi(u)\,\varphi'(v) + \varphi(v)\,\varphi'(u)}{1 - k^2 \varphi^2(u)\,\varphi^2(v)}$$

Следовательно, функция $\varphi(u)$ обладает алгебраической теоремой сложения. С ее помощью мы можем доказать, что $\varphi(u)$ для всех конечных значений аргумента u есть однозначно определенная функция характера целой рациональной функции, и, исходя отсюда, можем построить полную теорию эллиптических функций.

Теорема Эйлера непосредственно распространяется на сумму произвольного числа интегралов первого рода. Пусть

$$\int_{(g_1 h_1)}^{(x_1 y_1)} \frac{dx}{y} + \int_{(g_2 h_2)}^{(x_2 y_2)} \frac{dx}{y} + \cdots + \int_{(g_r h_r)}^{(x_r y_r)} \frac{dx}{y} = \int_{(g' h')}^{(x' y')} \frac{dx}{y}$$

где $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$, ..., $(x_r y_r)$, $(g_1 h_1)$, $(g_2 h_2)$, ..., $(g_r h_r)$ и $(g' h')$ — произвольные пары значений эллиптического образа, а x' и y' составляются рационально из величин x_1, y_1, ..., $g' h'$. В этой форме теорема

обобщена Абелем сначала на гиперэллиптические интегралы. Если функция $R(x)$ представляет собой целую рациональную функцию от x степени $2\rho+1$ или $2\rho+2$ и, следовательно, ранг гиперэллиптического образа $y^2-R(x)=0$ равен ρ, то интегралы

$$\int \frac{x^{\beta-1}}{y}\,dx \qquad (\beta=1,2,\ldots,\rho)$$

могут рассматриваться как ρ интегралов первого рода и по теореме Абеля для гиперэллиптических интегралов первого рода имеют место ρ уравнений

$$\sum_{\lambda=1}^{r}\int_{(g_\lambda h_\lambda)}^{(x_\lambda' y_\lambda')} \frac{x^{\beta-1}}{y}\,dx = \sum_{\alpha=1}^{\rho}\int_{(g_\alpha' h_\alpha')}^{(x_\alpha' y_\alpha')} \frac{x^{\beta-1}}{y}\,dx \qquad (\beta=1,2,\ldots,\rho)$$

В них r обозначает любое целое положительное число; пары значений $(x_{\lambda'} y_{\lambda'})$, $(g_\lambda h_\lambda)$ и $(g_\alpha' h_\alpha')$, входящие в верхние и нижние пределы интегралов в левой части равенства и в нижние пределы правой части, могут быть выбраны произвольно, в то время как величины x_α' и y_α', входящие в верхние пределы ρ интегралов правой части, зависят рационально от корней уравнения ρ-й степени, коэффициенты которого составляются рационально из заданных величин $x_\lambda y_\lambda$, g_λ, h_λ, g_α', h_α'. Пути интегрирования все произвольны, но должны быть выбраны в ρ уравнениях, образующих предыдущую систему, совпадающими.

Якоби выяснил, каким образом из этой теоремы Абеля вытекает существование периодических функций многих переменных, обладающих алгебраической теоремой сложения, причем он действовал подобно тому, как это было раньше сделано для эллиптических функций.

Из системы ρ дифференциальных уравнений

$$du_\beta = \sum_{\alpha=1}^{\rho} \frac{x_\alpha^{\beta-1}}{y_\alpha}\,dx_\alpha \qquad (\beta=1,2,\ldots,\rho)$$

с дополнительным условием, что при $u_1=0$, $u_2=0,\ldots,u_\rho=0$ пара значений $(x_\alpha y_\alpha)$ переходит в пару значений $(a_\alpha b_\alpha)$, причем все пары $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2),\ldots,(a_\rho b_\rho)$ различны между собой, вытекает, что для всех значений $u_1, u_2,\ldots,u_\rho$, достаточно малых по абсолютной величине, $x_1, x_2,\ldots,x_\rho$ представляются степенными рядами

$$x_\alpha = \varphi_\alpha(u_1, u_2,\ldots,u_\rho) \qquad (\alpha=1,2,\ldots,\rho)$$

Обозначим теперь через $(v_1, v_2, \ldots, v_\rho)$ любую другую систему значений аргументов, которая, однако, должна быть выбрана так, чтобы она сама, так же как система $(u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_\rho + v_\rho)$, лежала внутри области сходимости рядов $\varphi_1(u_1, u_2, \ldots, u_\rho)$, $\varphi_2(u_1, u_2, \ldots, u_\rho), \ldots,$ $\varphi_\rho(u_1, u_2, \ldots, u_\rho)$. Тогда, если положить

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_\alpha(v_1, v_2, \ldots, v_\rho) = x_\alpha'\\ &\varphi_\alpha(u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_\rho + v_\rho) = x_\alpha''\end{aligned}\right\} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, \rho)$$

имеют место ρ уравнений

$$\sum_{\alpha=1}^{\rho} \int\limits_{(a_\alpha b_\alpha)}^{(x_\alpha y_\alpha)} \frac{x^{\beta-1}}{y} dx + \sum_{\alpha=1}^{\rho} \int\limits_{(a_\alpha b_\alpha)}^{(x_\alpha' y_\alpha')} \frac{x^{\beta-1}}{y} dx = \sum_{\alpha=1}^{\rho} \int\limits_{(a_\alpha b_\alpha)}^{(x_\alpha'' y_\alpha'')} \frac{x^{\beta-1}}{y} dx$$

Из теоремы Абеля следует, что значения x_α'' суть алгебраические функции $x_1, x_2, \ldots, x_\rho$ и $x_1', x_2', \ldots, x_\rho'$. Поэтому ρ степенных рядов $\varphi_\alpha(u_1, \ldots, u_\rho)$ имеют свойство, что их значения для составной системы аргументов $(u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_\rho + v_\rho)$ вычисляются алгебраически из их значений для простых аргументов, другими словами, функциональные элементы $\varphi_\alpha(u_1, u_2, \ldots, u_\rho)$ обладают алгебраической теоремой сложения.

Если мы напишем дифференциальные уравнения, имеющие место между парами значений $(x_\alpha y_\alpha)$ и переменными $u_1, u_2, \ldots, u_\rho$, в форме интегральных уравнений

$$u_\beta = \sum_{\alpha=1}^{\rho} \int\limits_{(a_\alpha b_\alpha)}^{(x_\alpha y_\alpha)} \frac{x^{\beta-1}}{y} dx \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, \rho)$$

то из предыдущих положений относительно периодов интегралов первого рода вытекает дальнейшее важное свойство функционального элемента $\varphi_\alpha(u_1 u_2, \ldots, u_\rho)$. А именно, он является 2ρ-кратно периодическим, т. е. его значение остается неизменным, если мы аргументы $u_1, u_2, \ldots, u_\rho$ одновременно увеличим на

$$2\omega_{1\beta}, 2\omega_{2\beta}, \ldots, 2\omega_{\rho\beta}$$

или на $\qquad\qquad (\beta = 1, 2, \ldots, \rho)$

$$2\omega_{1\beta}', 2\omega_{2\beta}', \ldots, 2\omega_{\rho\beta}'$$

Непосредственно обнаруживается, что аналитические функции, определяемые функциональными элементами $\varphi_\alpha(u_1, u_2, \ldots, u_\rho)$, при дальнейшем расширении области их существования не остаются однозначными, но что мы получим однозначные функции, если образуем из ρ пар $(x_1 y_1), (x_2 y_2), \ldots, (x_\rho y_\rho)$ рациональные симметричные выражения и представим их с помощью ρ дифференциальных уравнений

$$du_\beta = \sum_{\alpha=1}^{\rho} \frac{x_\alpha^{\beta-1}}{y_\alpha} dx_\alpha \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, \rho)$$

как функции от $u_1, u_2, \ldots, u_\rho$. Алгебраическая теорема сложения и периодичность остаются в силе также для этих однозначных функций ρ переменных. В действительном построении этих функций состоит решение так называемой задачи обращения Якоби, охарактеризованной выше.

---

10. Если в эллиптическом интеграле первого рода

$$\int \frac{d\xi}{\sigma}, \qquad \sigma = \sqrt{\xi(1-\xi)(1-c^2\xi)}$$

вместо ξ ввести новую переменную x с помощью уравнения

$$\xi = \frac{U}{V}$$

где U, V — целые рациональные функции от x без общих делителей, то интеграл переходит в

$$\int \frac{(U'V - UV')\,dx}{\sqrt{UV(V-U)(V-c^2U)}}$$

который, вообще говоря, будет гиперэллиптическим. В частности, если

$$U = (1-\alpha)(1-\beta)x, \qquad V = (x-\alpha)(x-\beta)$$

то

$$V - U = (x-1)(x-\alpha\beta)$$

и

$$\int \frac{d\xi}{\sigma} = -\sqrt{(1-\alpha)(1-\beta)} \int \frac{(x^2-\alpha\beta)\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)(x-\alpha\beta)\varphi(x)}}$$

где

$$\varphi(x) = (x-\alpha)(x-\beta) - c^2(1-\alpha)(1-\beta)x$$

Определим c^2 так, чтобы $\varphi(x)$ было полным квадратом; это будет, если

$$\alpha+\beta+c^2(1-\alpha)(1-\beta)=\mp\sqrt{\alpha\beta}$$

Тогда

$$c^2=-\frac{(\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta})^2}{(1-\alpha)(1-\beta)},\qquad \varphi(x)=(x\pm\sqrt{\alpha\beta})^2$$

и

$$\int\frac{d\xi}{\sigma}=-\sqrt{(1-\alpha)(1-\beta)}\int\frac{(x\mp\sqrt{\alpha\beta})\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)(x-\alpha\beta)}}.$$

Следовательно, подстановка

$$\xi=\frac{(1-\alpha)(1-\beta)x}{(x-\alpha)(x-\beta)}$$

дает два случая приведения гиперэллиптических интегралов первого рода второго ранга к эллиптическим, найденные Якоби:

$$J_1=\int\frac{(x-\sqrt{\alpha\beta})\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)(x-\alpha\beta)}}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{(1-\alpha)(1-\beta)}}\int\frac{d\xi}{\sqrt{\xi(1-\xi)(1-c_1^2\xi)}}$$

$$J_2=\int\frac{(x+\sqrt{\alpha\beta})\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)(x-\alpha\beta)}}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{(1-\alpha)(1-\beta)}}\int\frac{d\xi}{\sqrt{\xi(1-\xi)(1-c_2^2\xi)}}$$

Так как любой интеграл первого рода можно представить как линейную комбинацию J_1 и J_2:

$$\int\frac{(k+lx)\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)(x-\alpha\beta)}}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{k}{\sqrt{\alpha\beta}}+l\right)J_1-\frac{1}{2}\left(\frac{k}{\sqrt{\alpha\beta}}-l\right)J_2,$$

то видим, что каждый интеграл первого рода, принадлежащий иррациональности $\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)(x-\alpha\beta)}$, приводится к эллипти-

ческому[9]. Интегралы, на которые указывает Ковалевская, получаются из только что рассмотренных заменой

$$\alpha = \frac{1}{-k}, \qquad \beta = \frac{1}{-\lambda}$$

11. Кратной касательной называется прямая, которая касается кривой в нескольких точках или имеет с кривой в данной точке касание второго или более высокого порядка. У кривых ниже четвертого порядка нет двойных касательных.

Если обозначить порядок кривой через n, класс через n', число обыкновенных двойных точек через d, число точек возврата через r, число двойных касательных через d', число точек перегиба через r', то имеют место формулы Плюкера

$$\begin{aligned} n' &= n(n-1) - 2d - 3r \\ r' &= 3n(n-2) - 6d - 8r \\ n &= n'(n'-1) - 2d' - 3r' \\ r &= 3n'(n'-2) - 6d' - 8r' \end{aligned}$$

Из них получается формула

$$d' = \frac{1}{2} n(n-2)(n^2-9) - (2d+3r)(n^2-n-6) + \\ + 2d(d-1) + \frac{9}{2} r(r-1) + 6rd$$

из которой следует, что для кривой четвертого порядка третьего ранга (для нее $d = 0$ и $r = 0$) число двойных касательных равно 28. Из них можно образовать $\frac{1}{2} \times 28 \times 27 = 378$ пар двойных касательных; каждая из этих пар дает начало пяти различным коническим сечениям, так как через четыре точки касания каких-нибудь двух двойных касательных можно вписать в кривую четвертого порядка пять конических сечений, каждое из которых проходит через четыре точки касания двух других двойных касательных. Каждая пара двойных касательных образует с пятью другими парами группу шести пар, для которой точки касания каких-нибудь двух из этих пар лежат на одном коническом сечении, откуда следует, что 378 пар распадаются на 63 такие группы из 6 пар. (См. Сальмон[12] или Аппель и Гурса[8].)

12. По поводу трансцендентной и алгебраической точек зрения, в проблеме приведения абелевых интегралов к полям низшего жанра, см. книгу Н. Г. Чеботарева [6], стр. 370.

Литература

1. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М. — Л., 1946.
2. Гурвиц А. Теория аналитических и эллиптических функций. Перевод под редакцией Н. Е. Кочина, Л. — М., 1933.
3. Долбня И. Исследование по теории абелевых интегралов. Спб., 1896.
4. Журавский А. М. Справочник по эллиптическим функциям. АН СССР, М. — Л., 1941.
5. Золотарев Е. И. Теория целых комплексных чисел с приложением к интегральному исчислению. Спб., 1874. Полное собрание соч., Л., 1931.
6. Чеботарев Н. Г. Теория алгебраических функций. ГТТИ, М.—Л., 1948.
7. Чебышев П. Л. Полное собрание сочинений, том II, АН СССР М.—Л. 1947.
8. Apell P. et Goursat E. Theorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales, Paris, 1895.
9. Königsberger. L. Ueber die Transformation der Abelschen Functionen. Crelle, 1865. S. 17—42.
10. Krazer A. Lehrbuch der Thetafunktionen. Leipzig, 1903.
11. Picard E. Traité d'analyse, t. II. Paris, 1905,
12. Salmon G. Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven, Leipzig, 1882.
13. Van der Waerden, Einführung in die algebraische Geometrie, Berlin, 1939.
14. Weierstrass K. Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Transcendenten. Math. Werke, Bd. IV. Berlin, 1902.



Приложение III

К СТАТЬЕ „О ПРЕЛОМЛЕНИИ СВЕТА В КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ СРЕДАХ“

1. Приведем выдержки из работы Вито Вольтерра[1] „О световых колебаниях в двоякопреломляющих средах“, разъясняющие сущность ошибки Ковалевской, которая вместе с Ламе не заметила многозначности употребляемого им решения.

„Вебер* показал, что если взять уравнения

$$\begin{aligned} x &= b\,\mathrm{sn}\,(u_2, k)\,\mathrm{dn}\,(u_3, \mu) \\ y &= a\,\mathrm{cn}\,(u_2, k)\,\mathrm{cn}\,(u_3, \mu) \\ z &= a\,\mathrm{dn}\,(u_2, k)\,\mathrm{sn}\,(u_3, \mu) \end{aligned} \qquad (1)$$

где

$$k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}, \qquad \mu^2 = \frac{a^2(b^2 - c^2)}{b^2(a^2 - c^2)}$$

то, исключив u_2, u_3, получим уравнение поверхности волны

$$\frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2 - a^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2 + z^2 - b^2} + \frac{z^2}{y^2 + x^2 + z^2 - c^2} = 1 \qquad (2)$$

Обозначим через $4K$ действительный период, соответствующий модулю k, через $4L$ — такой же период, соответствующий модулю μ.

Давая u_2 все вещественные значения, заключающиеся между $-K$ и K, а u_3 — значения между $-2L$ и $2L$, получим из (1) все точки внешней полости поверхности волны, которую обозначим через σ'. Посмотрим, как расположены линии $u_2 = \mathrm{const}$, $u_3 = \mathrm{const}$ на поверхности σ'.

---

* Journ. Crelle, t. 84, S. 353.

Проведем через начало прямые T_1, T_2, параллельные оптическим осям. Они разбивают плоскость xz на четыре части, содержащие соответственно положительные и отрицательные части осей x, z. Обозначим их через $\omega_x, \omega_{-x}, \omega_z, \omega_{-z}$.

Положив $u_2 = -K$, найдем $x = -b\,\mathrm{dn}\,u_3$, $y = 0$, $z = b\mu\,\mathrm{sn}\,u_3$. Эта линия есть часть сечения σ' плоскостью xz, заключенная в ω_{-x}. Точно так же линия $u_2 = K$ есть часть сечения, заключенная в ω_x. Линии $u_3 = \pm L$ суть части пересечения σ' с плоскостью xz, заключенные в ω_{-z} и ω_z.

Возводя (1) в квадрат и складывая, найдем

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 - (a^2 - b^2)\,\mathrm{sn}^2 u_2 \tag{3}$$

Пересечение сферы (3) с σ' представляет две кривые, расположенные по обе стороны плоскости yz. Если кривая, находящаяся со стороны положительных x, соответствует $u_2 = a_2$, то $K > a_2 > 0$. Другая кривая будет тогда соответствовать $u_2 = -a_2$.

Точно также находим

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = a^2 [b^2 - (b^2 - c^2)\,\mathrm{sn}^2 u_3] \tag{4}$$

Рассмотрим две плоскости xz, xy. Они разделяют пространство на четыре части, которые мы обозначим через

$$S_{y,z}, \quad S_{-y,z}, \quad S_{y,-z}, \quad S_{-y,-z} \tag{5}$$

Пересечение эллипсоида (5) с σ' состоит из двух кривых, расположенных с двух сторон плоскости xy, каждая из которых пересекается плоскостью xz. Можно, следовательно, рассмотреть четыре части

$$L_{y,z}, \quad L_{-y,z} \quad L_{y,-z} \quad L_{-y,-z}$$

этого пересечения, содержащиеся в четырех частях (5) пространства. Если $L_{y,z}$ соответствует $u_3 = a_3$, то $L \geqslant a_3 \geqslant 0$ и

$$\begin{aligned} &L_{-y,z} \text{ будет отвечать значению } u_3 = 2L - a_3,\\ &L_{y,-z} \text{ будет отвечать значению } u_3 = -a_3,\\ &L_{-y,-z} \text{ будет отвечать значению } u_3 = 2L + a_3. \end{aligned} \tag{6}$$

Отсюда видим, что u_2, рассматриваемая как функция точек поверхности σ', непрерывна, в то время как u_3 разрывна вдоль линий $u_2 = -K$, $u_2 = K$. Сумма значений u_3 на двух сторонах этих линий всегда равна $2L$. u_3 также разрывна вдоль части Λ пересечения плоско-

сти xy с σ', расположенной со стороны отрицательных y. Разность значений u_3 вдоль Λ постоянна и равна $4L$.

Следовательно, эллиптические функции $\operatorname{sn} u_2$, $\operatorname{cn} u_2$, $\operatorname{dn} u_2$, $\operatorname{sn} u_3$, $\operatorname{dn} u_3$ непрерывны на σ', но $\operatorname{cn} u_3$ разрывна вдоль линий $u_2 = K$, $u_2 = -K$. Значения ее на двух сторонах этих линий равны по величине и противоположны по знаку. Если теперь положить

$$\begin{aligned} x &= bu_1 \operatorname{sn} u_2 \operatorname{dn} u_3 \\ y &= au_1 \operatorname{cn} u_2 \operatorname{cn} u_3 \\ z &= au_1 \operatorname{dn} u_2 \operatorname{sn} u_3 \end{aligned} \quad (7) \qquad \begin{aligned} \infty &> u_1 \geqslant 0 \\ K &\geqslant u_2 \geqslant -K \\ 2L &\geqslant u_3 > -2L \end{aligned} \quad (8)$$

то поверхности $u_1 = \text{const}$ будут внешними полостями системы поверхностей волны концентрических и гомотетичных. Поверхности

$$u_2 = \text{const}, \quad u_3 = \text{const}$$

суть конусы с вершиной в начале, направляющими которых являются рассмотренные уже линии на поверхности σ'.

Эллиптические функции , рассматриваемые как функции точки в пространстве, непрерывны, в то время как $\operatorname{cn} u_3$ будет разрывна вдоль частей ω_x, ω_{-x} плоскости xz . . .

Величины u_1, u_2, u_3, удовлетворяющие (7) и (8), суть координаты Вебера точки x, y, z. . .“

„Если в выражениях для ξ, η, ζ (см.стр. 79) заменить . .". функции

$$\cos \frac{2\pi(t-\lambda_1)}{\tau}, \qquad \cos \frac{2\pi(t-\lambda_2)}{\tau}$$

функциями

$$F_1(t+\lambda_1) + \varphi_1(t-\lambda_1), \qquad F_2(t+\lambda_2) + \varphi_2(t-\lambda_2)$$

где F_1, φ_1, F_2, φ_2 произвольные функции, то ξ, η, ζ будут оставаться интегралами уравнений (1). Следовательно

$$\begin{aligned} \xi &= X_1\{F_1(t+\lambda_1) + \varphi_1(t-\lambda_1)\} + X_2\{F_2(t+\lambda_2) + \varphi_2(t-\lambda_2)\} \\ \eta &= Y_1\{F_1(t+\lambda_1) + \varphi_1(t-\lambda_1)\} + Y_2\{F_2(t+\lambda_2) + \varphi_2(t-\lambda_2)\} \\ \zeta &= Z_1\{F_1(t+\lambda_1) + \varphi_1(t-\lambda_1)\} + Z_2\{F_2(t+\lambda_2) + \varphi_2(t-\lambda_2)\} \end{aligned} \quad (*)$$

Световые колебания в изотропной среде зависят от дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \quad (**)$$

имеющего интеграл

$$u = \frac{F(r + Vt)}{r} + \frac{\varphi(r - Vt)}{r}, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad (*_*^*)$$

где F, φ суть произвольные функции. Этот интеграл представляет аналогию с интегралами (*) и, как они, обращается в бесконечность в начале координат.

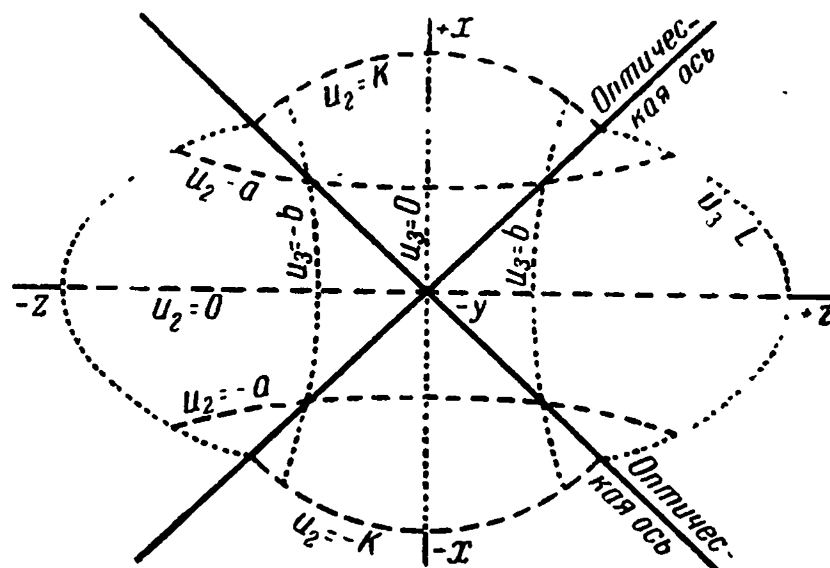
Известно, что можно найти общий интеграл уравнения (**) в форме, данной Пуассоном, исходя из интеграла $(*_*^*)$ и предполагая выполненным à priori принцип Гюйгенса. Можно теперь поставить вопрос: что получим, применяя тот же прием, исходя из интегралов (*) и предполагая выполненным принцип Гюйгенса?

Мы показали в разделе 5 этого мемуара, что отсюда получаются функции, данные Ковалевской в качестве общих интегралов уравнений Ламе. Если бы можно было доказать, что найденные таким образом формулы удовлетворяют уравнениям Ламе, то было бы оправдано применение принципа Гюйгенса.

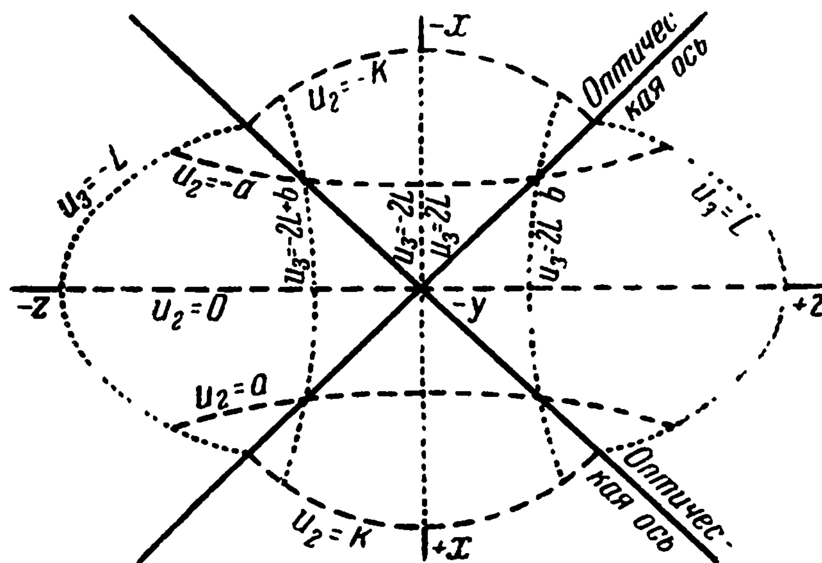
Но мы показали в разделе 5, что это доказательство невозможно. Откуда получается этот результат, кажущийся на первый взгляд странным?

Чтобы найти узел вопроса, нужно иметь перед глазами поверхность волны, на которой начерчены системы сферических и эллиптических линий, образованных криволинейными координатами Вебера ...“

„... Вот что мы увидели бы, глядя на внешнюю полость поверхности волны со стороны положительных y.



А вот что увидели бы, глядя со стороны отрицательных y.



Эти фигуры показывают, что u_3 разрывна вдоль $u_2 = K_1$ и $u_2 = -K$.

Возьмем теперь первые члены интегралов (*). Выражения, какими могут быть представлены X_1, Y_1, Z_1, суть

$$-\frac{\mu^2 b \operatorname{sn} u_2 \operatorname{sn} u_3 \operatorname{cn} u_3}{a^2 u_1 \Delta}, \quad -\frac{\operatorname{cn} u_2 \operatorname{sn} u_3 \operatorname{dn} u_3}{a u_1 \Delta}, \quad \frac{\operatorname{dn} u_2 \operatorname{cn} u_3 \operatorname{dn} u_3}{a u_1 \Delta}$$

$$\Delta = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u_2 - \mu^2 \operatorname{sn}^2 u_3 + (\mu^2 + k^2 - 1) \operatorname{sn}^2 u_2 \operatorname{sn}^2 u_3$$

u_1 заменяет параметр λ_1 Ламе.

Эти выражения таковы, что, принимая во внимание изображенные фигуры, видим, что X_1, Z_1 многозначные функции координат точки пространства x, y, z. Точно так же многозначны X_2, Z_2. Это обстоятельство не бросается сразу в глаза, если рассматривать эти величины в форме, которую им дал Ламе.

Вот почему он ошибался, думая, что они могут представлять световые колебания, исходящие из центра колебаний. Это те же функции (6), которые появляются в мемуаре г-жи Ковалевской.

Если заметить многозначность этих функций, то видно, что метод, открытый Вейерштрассом для интегрирования линейных уравнений в частных производных, не может быть применен к интегрированию уравнений Ламе в координатах Вебера.“

Литература

1. Vito Volterra. Sur les vibrations lumineuses dans les milieux biréfringents. Acta Math. 1892—1893, t. 16, p. 153—215.

2. Weierstrass K. Zur Integration der linearen partiellen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten (von Frau v. Kovalevsky 1884 veröffentlicht, Acta math., Bd 6) Mathematische Werke, Berlin, 1894, Bd I, S. 275—295.



Приложение IV

К СТАТЬЕ „ДОПОЛНЕНИЯ И ЗАМЕЧАНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ ЛАПЛАСА О ФОРМЕ КОЛЬЦА САТУРНА"

1. В настоящее время считают, что кольца Сатурна состоят из метеоров ([1], стр. 894).

2. Дайсон[2] показал, что такого рода кольцо должно быть неустойчивым по отношению к возмущениям, при которых площадь поперечного сечения меняется по длине. Кольцо при этом стремится распасться на отдельные части ([1], стр. 896).

3. Тиссеран в своем курсе небесной механики [6] подробно изложил эту работу С. В. Ковалевской, снабдив ее графиками и разъяснениями. Для $M = 0$, т. е. для случая отсутствия внешней притягивающей массы, он выводит из формул Ковалевской такую формулу, выражающую зависимость между угловой скоростью вращения ω, плотностью ρ и размерами кольца:

$$\frac{\omega^2}{\pi\rho} = \frac{a^2}{D^2}\left(\ln\frac{8D}{a} - \frac{5}{4}\right)$$

a — большая полуось эллипса, D — расстояние центра эллипса от центра кольца. Эта формула выводится Ламбом другим путем ([1], стр. 895).

Литература

1. Ламб. Гидродинамика. Перевод под ред. П. А. Слезкина, ГТТИ, М. — Л., 1947.
2. Dyson. Phil. Trans. 1892, CLXXIV, 43.
3. Laplace. Mémoire sur la théorie de l'anneau de Saturne. Mém. de l'Acad. des Sciences, 1789 (1787). (Mécanique céleste; 3, ch. VI).
4. Matthiessen. Neue Untersuchungen über frei rotierende Flüssigkeiten, Schriften d. Univ. zu Kiel, 1859, Bd VI (перечень работ).
5. Poincaré. Acta Math., 1885, t. VII.
6. Tisserand. Traité de mécanique céleste. Paris, 1889—1896, t. II.





Приложение V

К СТАТЬЯМ: „ЗАДАЧА О ВРАЩЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ“ И „МЕМУАР ОБ ОДНОМ ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ ЗАДАЧИ О ВРАЩЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ТЕЛА“

1. С. Ковалевская говорит о пяти произвольных постоянных, так как одна может считаться включенной в t; действительно, система (1) такова, что ее уравнения не меняются при замене t на $t-t_0$, где t_0 — произвольное число, поэтому в рядах (2) можно писать t вместо $t-t_0$.

2. Это место § 1 мемуара Ковалевской вызвало возражение акад. А. А. Маркова. Из переписки его с Ляпуновым, хранящейся в архиве Академии Наук, видно, что он сомневался в том, что данная Ковалевской система показателей является единственно возможной.

Далее, по поводу определителя, который вычисляет Ковалевская в статье „Об одном свойстве. . .“, А. А. Марков говорил, что там нужно исследовать и случай кратных корней. Г. Г. Аппельрот предпринял исследование показателей (не удовлетворившее Маркова) и указанного определителя, причем здесь был действительно обнаружен пропущенный С. В. Ковалевской случай. Исследование П. А. Некрасова показало, однако, что общий интеграл в этом случае является многозначным.

Сомнения А. А. Маркова, выраженные приведенными, а также некоторыми другими его замечаниями, в единственности случая С. В. Ковалевской были устранены А. М. Ляпуновым, давшим строгое доказательство теоремы С. В. Ковалевской и притом обобщившим ее на случай любых однозначных общих интегралов (С. В. Ковалевская рассматривала только такие однозначные интегралы, которые выражаются рядами Лорана с конечной главной частью).

Мы приводим здесь полностью статью А. М. Ляпунова [23], в которой он доказывает обобщенную теорему С. В. Ковалевской.

А. М. Ляпунов

Об одном свойстве дифференциальных уравнений задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку*

1. Вопрос о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку, зависит, как известно, от интегрирования системы дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} &= (B-C)\,qr+\beta\zeta-\gamma\eta, & \frac{d\xi}{dt} &= r\eta-q\zeta \\ B\frac{dq}{dt} &= (C-A)\,rp+\gamma\xi-\alpha\zeta, & \frac{d\eta}{dt} &= p\zeta-r\xi \\ C\frac{dr}{dt} &= (A-B)\,pq+\alpha\eta-\beta\xi, & \frac{d\zeta}{dt} &= q\xi-p\eta \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь A, B, C, α, β, γ суть известные постоянные, из которых первые три представляют главные моменты инерции твердого тела, соответствующие неподвижной точке, а последние три пропорциональны прямоугольным координатам центра тяжести в системе координат, оси которых совпадают с осями этих моментов инерции.

Без некоторых предположений относительно этих постоянных уравнения (1) еще не удалось проинтегрировать, и до недавнего времени были известны только два случая, в которых получался их общий интеграл.

Один из них, в котором интегрирование было выполнено еще Эйлером, есть тот, когда

$$\alpha=\beta=\gamma=0$$

т. е. когда центр тяжести тела совпадает с неподвижной точкой; другой, указанный Лагранжем, — тот, когда два из названных моментов инерции равны между собой, а центр тяжести лежит где-либо на оси

---

* Предмет этой статьи был доложен мною Харьковскому математическому обществу в заседании 10 мая 1893 г. Но некоторые не зависящие от меня обстоятельства помешали своевременному окончанию ее редактирования, вследствие чего она появляется в печати несколько запоздавшею. Считаю нужным заметить, что вопрос, которому она посвящена, решается также в только что опубликованном сочинении Г. Г. Аппельрота под заглавием *Задача о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки*.

третьего, т. е. когда при надлежащем выборе обозначений

$$A = B, \qquad \alpha = \beta = 0$$

В обоих случаях уравнения (1) интегрируются, как известно, при помощи эллиптических функций и величины p, q, r, ξ, η, ζ, каковы бы ни были их начальные значения, выражаются однозначными функциями времени t, не имеющими никаких других особенных точек, кроме полюсов (точек в бесконечности мы не рассматриваем).

С. В. Ковалевская недавно показала, как интегрируются уравнения (1) еще в одном случае: именно, когда два из моментов инерции равны удвоенному третьему, а центр тяжести лежит в плоскости осей равных моментов инерции, т. е. когда выбором обозначений можно распорядиться так, чтобы имели место равенства

$$A = B = 2\,C, \qquad \gamma = 0$$

В этом случае уравнения (1) интегрируются при помощи функций ϑ, зависящих от двух аргументов, но p, q, r, ξ, η, ζ попрежнему выражаются однозначными функциями времени, не имеющими других особенных точек, кроме полюсов.

Это-то последнее обстоятельство и послужило С. В. Ковалевской к открытию указанного сейчас случая.

Заметив, что в обоих известных случаях интегрируемости функции p, q, r, ξ, η, ζ обладают сказанным свойством, С. В. Ковалевская предложила себе найти, если возможно, новые случаи того же рода, и, стараясь разрешить эту задачу, пришла к своему случаю.

Путь, которому она следовала, намечен в §1 ее мемуара „Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe.“ (Acta math., t. 12), но с большею обстоятельностью указан в другом ее мемуаре который был напечатан в 14-м томе Acta mathematica под заглавием „Sur une propriété du système d'équations différentielles qui définit la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe.“

В настоящее время мы знаем, таким образом, три случая, в которых функции p, q, r, ξ, η, ζ, каковы бы ни были их начальные значения, выходят однозначными и без особенных точек, кроме полюсов.

Является вопрос, не существует ли других таких же случаев? Или, может быть, указанные три суть единственные случаи такого рода из всех, возможных механически?

Хотя С. В. Ковалевская и не высказывается в этом отношении категорически, но, судя по ходу ее рассуждений, надо думать, что своим исследованием она считала вопрос решенным и именно в последнем смысле. По крайней мере к такому заключению приводит сопоставление

двух следующих ее утверждений: в начале первого своего мемуара она говорит, что все случаи рассматриваемого рода должны быть таковы, чтобы уравнениям (1) можно было удовлетворить рядами, характерными для полюсов и содержащими в своих коэффициентах пять произвольных постоянных, а в конце второго мемуара высказывает как вывод, что это возможно только в трех указанных выше случаях.

Однако анализ ее, поскольку о нем можно судить на основании опубликованного в упомянутых сейчас мемуарах, нельзя считать решающим, так как он основывается на некоторых допущениях, законность которых может подлежать сомнению.

Это обстоятельство первый указал академик А. А. Марков, который недавно в своих письмах сообщил мне сущность возражений, которые высказывались им против анализа С. В. Ковалевской.

Но, вполне соглашаясь с А. А. Марковым относительно недостаточности этого анализа, я тем не менее склонен был думать, что вопрос разрешается в том именно смысле, как полагала С. В. Ковалевская, и что решение его может быть достигнуто без особых затруднений, если несколько иначе приняться за дело.

Вследствие этого я решил рассмотреть вопрос с другой точки зрения и попытаться приложить к нему методу, которая давно уже казалась мне наиболее подходящей для решения вопросов такого рода. Таким путем пришел я к доказательству единственности найденных трех случаев однозначности, которое и предлагаю здесь вниманию читателя.

Доказательство это основывается на соображениях, совершенно отличных от тех, которыми руководилась С. В. Ковалевская, чем не только устраняются некоторые затруднения принципиального характера, присущие ее методе, но и достигается значительное упрощение анализа вследствие меньшего числа и меньшей сложности тех частных случаев, которые приходится рассматривать.

Метода, которою я пользуюсь, обладает притом тем преимуществом, что приводит к более широкому заключению, а именно: она позволяет заключить, что во всех остальных возможных случаях, за исключением известных трех, функции p, q, r, ξ, η, ζ не только могут иметь особенные точки, отличные от полюсов, но при надлежащем выборе начальных значений наверно будут многозначными.

Наконец, хотя под возможными я и разумею здесь случаи, возможные механически, анализ мой обнимает и множество других случаев, ибо единственное предположение, которое я делаю, состоит в том, что A, B, C, α, β, γ вещественны, и что из чисел A, B, C ни одно не нуль.

Я доказываю таким образом следующее.

Из всех случаев, когда постоянные A, B, C, α, β, γ вещественны и A, B, C все отличны от нуля, известные три случая суть единствен-

ные, в которых функции p, q, r, ξ, η, ζ, определяемые уравнениями (1), однозначны при всяких начальных значениях.

2. Прежде чем говорить о методе, которою я здесь пользуюсь, считаю необходимым указать на некоторые следствия, вытекающие для уравнений (1) из принципов общей теории интегрирования дифференциальных уравнений и обусловливаемые тем обстоятельством, что вторые части этих уравнений суть целые функции величин p, q, r, ξ, η, ζ с постоянными коэффициентами.

Пусть p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0 суть начальные значения функций p, q, r, ξ, η, ζ, соответствующие некоторому определенному значению t, которое обозначим через t_0. Пусть значение это на плоскости переменного t представляется точкой O.

Всякий раз, когда p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0 выбраны определенным образом, а переменное t подчинено условию, чтобы представляющая точка оставалась внутри окружности достаточно малого радиуса с центром в точке O, функции p, q, r, ξ, η, ζ будут вполне определенными и представятся рядами, расположенными по целым положительным степеням $t - t_0$.

Если же переменное t не подчинено сказанному условию, то, чтобы говорить о значениях этих функций в какой-либо точке P, вообще необходимо задать путь L, соединяющий эту точку* с точкою O, и рассматривать соответствующее ему непрерывное изменение t от значения t_0 до значения, представляемого точкой P.

Тогда по способу аналитического продолжения функций можно будет определить функции p, q, r, ξ, η, ζ, смотря по обстоятельствам, или для всех точек пути L, включая и точку P, или только для точек, встречаемых при движении по этому пути от точки O ранее некоторой точки P' и насколько угодно близких к ней, но не для точки P'.

---

* Говоря о пути, соединяющем две точки O и P, мы подразумеваем, что речь идет о геометрическом месте точек, представляющих значения переменного t, вещественная и мнимая части которого даны под видом определенных и непрерывных функций вещественного переменного s, способного получать всевозможные значения, лежащие между некоторыми определенными пределами, соответствующими точкам O и P. При этом точки пути различаем значениями s, так что точки, соответствующие различным s, рассматриваем, как различные точки пути, хотя бы они и совпадали с одной и той же точкой плоскости, и две точки пути считаем бесконечно близкими только тогда, когда они соответствуют бесконечно близким значениям s.

В первом случае все точки пути L, включая и точку P, будут для функций p, q, r, ξ, η, ζ обыкновенными. Во втором все точки, встречаемые ранее P', будут обыкновенными, а точка P' будет особенной, и с приближением к ней по крайней мере некоторые из функций p, q, r, ξ, η, ζ не будут приближаться ни к каким пределам; что же касается всех остальных точек пути L, когда точка P' отлична от точки P, то относительно них при рассматриваемом выборе пути нельзя сказать ничего определенного.

Во втором случае, чтобы говорить о значениях функций p, q, r, ξ, η, ζ в точке P, путь L должен быть заменен каким-либо другим.

Допустим теперь, что, остановившись на каком-либо определенном выборе точки P и пути L, мы приписываем величинам p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0 различные значения и, когда это возможно, определяем соответствующие им значения функций p, q, r, ξ, η, ζ в точке P.

Тогда, если определение это оказывается возможным при каких-либо величинах p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0, то будет возможно и при всяких других, достаточно к ним близких.

Это вытекает из следующего весьма важного для нас предложения.

Если все точки пути L, включая и точку P, при

$$p_0 = p_0', \quad q_0 = q_0', \quad r_0 = r_0', \quad \xi_0 = \xi_0', \quad \eta_0 = \eta_0', \quad \zeta_0 = \zeta_0'$$

суть обыкновенные, то то же будет и при всяких других p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0, для которых модули величин (2)

$$p_0 - p_0', \quad q_0 - q_0', \quad r_0 - r_0', \quad \xi_0 - \xi_0', \quad \eta_0 - \eta_0', \quad \zeta_0 - \zeta_0'$$

не превосходят некоторого отличного от нуля предела, причем функции p, q, r, ξ, η, ζ, соответствующие таким p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0, будут способны представляться на пути L рядами расположенными по целым положительным степеням величин (2), сходящимися равномерно для всех точек этого пути, включая и точку P, и все эти точки для их коэффициентов, как функций переменного t, будут обыкновенными.

Из этого предложения следует, что если при определенном выборе точки P и пути L значения функций p, q, r, ξ, η, ζ в этой точке рассматриваются как функции величин p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0, то функции эти будут обладать определенными частными производными по каким угодно из этих величин и какого угодно порядка всякий раз, когда все точки пути L, включая и точку P, для функций p, q, r, ξ, η, ζ суть обыкновенные, и эти частные производные при постоянных p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0 представят функции переменного t, для которых всякая точка плоскости, выходящая для функций p, q, r, ξ, η, ζ при какой-либо выборе пути обыкновенной, будет при том же выборе пути также обыкновенной.

Вообще значения функций $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$ в какой-либо точке P, определяемые при одних и тех же $p_0, q_0, r_0, \xi_0, \eta_0, \zeta_0$, но при различных путях, могут быть различными.

Но допустим, что мы имеем дело с случаем, когда значения эти не зависят от пути, каковы бы ни были $p_0, q_0, r_0, \xi_0, \eta_0, \zeta_0$, т. е. когда функции $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$ однозначны при всяких начальных значениях.

Тогда при всяком определенном выборе величин $p_0, q_0, r_0, \xi_0, \eta_0, \zeta_0$ положения всех особенных точек этих функций будут вполне определенными и во всякой части плоскости, не содержащей этих точек, рассматривавшиеся частные производные будут также однозначными.

Разыскание условий этой однозначности при величинах $p_0, q_0, \eta_0, \xi_0, \eta_0, \zeta_0$, соответствующих некоторым известным частным решениям уравнений (1), и составляет сущность моей методы.

Я ограничиваюсь при этом рассмотрением частных производных первого порядка, чего при надлежащем выборе частных решений уравнений (1) оказывается вполне достаточно для полного решения вопроса. Пусть l означает какую-либо из величин $p_0, q_0, r_0, \xi_0, \eta_0, \zeta_0$.

Тогда уравнениями

$$u = \frac{\partial p}{\partial l}, \quad v = \frac{\partial q}{\partial l}, \quad w = \frac{\partial r}{\partial l}$$

$$x = \frac{\partial \xi}{\partial l}, \quad y = \frac{\partial \eta}{\partial l}, \quad z = \frac{\partial \zeta}{\partial l}$$

определится некоторое частное решение следующей системы линейных дифференциальных уравнений:

$$A\frac{du}{dt} = (B-C)(rv+qw) + \beta z - \gamma y$$

$$B\frac{dv}{dt} = (C-A)(pw+ru) + \gamma x - \alpha z$$

$$C\frac{dw}{dt} = (A-B)(qu+pv) + \alpha y - \beta x$$

$$\frac{dx}{dt} = \eta w - \zeta v + ry - qz$$

$$\frac{dy}{dt} = \zeta u - \xi w + pz - rx$$

$$\frac{dz}{dt} = \xi v - \eta u + qx - py$$

и все шесть таких решений, получаемых, когда l поочередно полагается равным p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0, будут независимыми, так что из них известным путем могут быть выводимы всякие другие решения той же системы.

Для всякого известного частного решения уравнений (1) коэффициенты в уравнениях (3) будут известными функциями t, и вопрос будет состоять в разыскании условий, при которых всякие функции u, v, w, x, y, z, удовлетворяющие этим уравнениям, оставались бы однозначными во всякой части плоскости, не содержащей особенных точек функций p, q, r, ξ, η, ζ рассматриваемого решения системы (1).

Всякие необходимые условия этого рода, наверно, будут необходимы и для однозначности функций p, q, r, ξ, η, ζ при всяких начальных значениях.

Действительно, пусть для рассматриваемого частного решения уравнений (1), соответствующего начальным значениям p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0, система (3) допускает решение, в котором функции u, v, w, x, y, z (все или только некоторые), выходя из точки O с начальными значениями u_0, v_0, w_0, x_0, y_0, z_0, достигают одной и той же точки P по двум путям, не встречающим особенных точек функций p, q, r, ξ, η, ζ, с различными значениями. Тогда функции p, q, r, ξ, η, ζ, определяемые начальными значениями

$$p_0+u_0\varepsilon, \quad q_0+v_0\varepsilon, \quad r_0+w_0\varepsilon, \quad \xi_0+x_0\varepsilon, \quad \eta_0+y_0\varepsilon, \quad \zeta_0+z_0\varepsilon$$

при $|\varepsilon|$ достаточно малом, но отличном от нуля, будут достигать той же точки по тем же путям также с различными значениями, ибо на основании указанного выше предложения функции эти при $|\varepsilon|$ достаточно малом представятся на рассматриваемых путях рядами, расположенными по целым положительным степеням ε, а члены первой степени относительно ε, очевидно, будут в этих рядах вида

$$u\varepsilon, \quad v\varepsilon, \quad w\varepsilon, \quad x\varepsilon, \quad y\varepsilon; \quad z\varepsilon$$

3. Чтобы требование однозначности функций u, v, w, x, y, z могло привести к каким-либо условиям, уравнения (3) должны быть рассматриваемы только для таких решений уравнений (1), которые обладали бы особенными точками по крайней мере для некоторых из функций p, q, r, ξ, η, ζ, ибо при отсутствии особенных точек для последних функции u, v, w, x, y, z также не будут иметь таких точек и всегда будут однозначными во всей плоскости переменного t.

Таким образом, для нашей методы весьма важно иметь какие-либо

частные решения уравнений (1) с особенными точками по крайней мере для некоторых из функций p, q, r, ξ, η, ζ.

Подобные решения действительно известны и возможны во всех случаях, за исключением одного, который характеризуется равенствами $\alpha = \beta = \gamma = 0$ и условием, что A, B, C не все различны.

Простейшие из таких решений суть решения вида

$$p = \frac{a}{t}, \quad q = \frac{b}{t}, \quad r = \frac{c}{t}$$
$$\xi = \frac{f}{t^2}, \quad \eta = \frac{g}{t^2}, \quad \zeta = \frac{h}{t^2} \tag{4}$$

где a, b, c, f, g, h означают постоянные, из которых по крайней мере некоторые отличны от нуля.

Не останавливаясь на разыскании всевозможных систем значений a, b, c, f, g, h, соответствующих решениям такого типа, укажем две такие системы, из которых одна возможна всякий раз, когда A, B, C все различны, другая — всякий раз, когда между числами α, β, γ по крайней мере одно есть нуль и по крайней мере одно не нуль.

Первая из этих систем определяется следующими формулами:

$$a = -B'C', \quad b = -C'A', \quad c = -A'B'$$
$$f = 0, \quad g = 0, \quad h = 0 \tag{5}$$

где

$$A' = \sqrt{\frac{A}{B-C}}, \quad B' = \sqrt{\frac{B}{C-A}}, \quad C' = \sqrt{\frac{C}{A-B}}$$

и радикалы имеют какие угодно свойственные им алгебраические значения.

Вторая, соответствующая предположению, что $\beta = 0$ и что из чисел α и γ хотя одно не нуль, есть следующая:

$$a = 0, \quad b = 2i, \quad c = 0$$
$$f = -\frac{2Bi}{\gamma + \alpha i}, \quad g = 0, \quad h = -\frac{2B}{\gamma + \alpha i} \tag{6}$$

где i означает $\pm\sqrt{-1}$.

Этих формул, если к ним присоединить подобные им, соответствующие предположению $\alpha = 0$ или $\gamma = 0$, будет для нас вполне достаточно, так как в случае, когда A, B, C все различны, мы можем пользо-

ваться формулами (5), а в случае, когда между ними существуют равные, одно из чисел α, β, γ всегда можем предположить нулем (α или β, когда $A = B$; β или γ, когда $B = C$; γ или α, когда $C = A$), после чего можно будет пользоваться формулами (6) или им подобными, если только рассматриваемый случай не заключается в случае Эйлера.

Для решения типа (4) система (3) будет следующего вида:

$$At\frac{du}{dt} = (B - C)(cv + bw) + \beta tz - \gamma ty$$

$$Bt\frac{dv}{dt} = (C - A)(aw + cu) + \gamma tx - \alpha tz$$

$$Ct\frac{dw}{dt} = (A - B)(bu + av) + \alpha ty - \beta tx$$

$$t^2\frac{dx}{dt} = gw - hv + cty - btz$$

$$t^2\frac{dy}{dt} = hu - fw + atz - ctx$$

$$t^2\frac{dz}{dt} = fv - gu + btx - aty$$

и, если за неизвестные функции вместо x, y, z принять tx, ty, tz, приведется к одному из известных типов.

Интегрирование этой системы зависит от решения следующего алгебраического уравнения 6-й степени относительно неизвестного k:

$$\begin{vmatrix} Ak & (C-B)c & (C-B)b & 0 & \gamma & -\beta \\ (A-C)c & Bk & (A-C)a & -\gamma & 0 & \alpha \\ (B-A)b & (B-A)a & Ck & \beta & -\alpha & 0 \\ 0 & h & -g & k-1 & -c & b \\ -h & 0 & f & c & k-1 & -a \\ -g & -f & 0 & -b & a & k-1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (7)$$

Рассмотрение этого уравнения тотчас же дает и условия однозначности функций u, v, w, x, y, z.

Условия эти состоят в том, чтобы 1) все корни этого уравнения были вещественными целыми числами (положительными, отрицательны-

ми или нулями — безразлично) и 2) чтобы всякий кратный его корень обращал в нуль все миноры определителя, фигурирующего в первой части равенства, до порядка, равного кратности этого корня, невключительно. Условия эти необходимы и достаточны.

Разысканием их мы и займемся в следующих параграфах, ограничиваясь предположением, что A, B, C, α, β, γ вещественны, и предполагая, конечно, что A, B, C все отличны от нуля *.

4. Начнем с случая, когда A, B, C все различны.

Если остановимся на формулах (5), то уравнение (7) после небольших преобразований приведется к виду

$$k(k-1)^3(k^2-4)=0$$

и, следовательно, условие, относящееся к характеру его корней, всегда будет выполнено. Но так как уравнение это имеет трехкратный корень 1 то необходимо еще удовлетворить, чтобы все миноры второго порядка для определителя, представляющего первую часть уравнения (7), при $k=1$ делались нулями.

Выражая, что это условие выполняется для минора, получаемого из названного определителя вычеркиванием второго и третьего столбцов и третьей и четвертой строк, находим

$$\begin{vmatrix} A & 0 & \gamma & -\beta \\ A'B'(C-A) & -\gamma & 0 & \alpha \\ 0 & -A'B' & 0 & B'C' \\ 0 & C'A' & -B'C' & 0 \end{vmatrix}=0$$

Равенство же это, приводящееся к виду

$$\alpha\sqrt{A(B-C)}+\beta\sqrt{B(C-A)}+\gamma\sqrt{C(A-B)}=0$$

при вещественных A, B, C, α, β, γ и при различных A, B, C, между которыми среднее пусть будет B, возможно только в случае, когда

$$\beta=0,\quad \alpha\sqrt{A(B-C)}+\gamma\sqrt{C(A-B)}=0 \tag{8}$$

* Уравнение (7) только обозначениями отличается от того, к которому приходит С. В. Ковалевская (ее неизвестное n связано с неизвестным k равенством $n-1=k$), и требование, которому, следуя ее указанию, пришлось бы подчинить его корни, выразилось бы так: пять из этих корней должны быть вещественными неотрицательными числами.

Случай, характеризуемый этими равенствами, был указан Г. Г. Аппельротом, который пришел к нему из рассмотрения того же уравнения (7), желая удовлетворить уравнениям (1) рядами, обладающими полюсами первого порядка и содержащими в своих коэффициентах пять произвольных постоянных *.

Случай этот послужил потом предметом исследования профессоров П. А. Некрасова, Н. Е. Жуковского и Б. К. Млодзеевского, причем П. А. Некрасовым было показано, что если только α и γ не нули (т. е. если рассматриваемый случай не приводится к Эйлерову), функции p, q, r, ξ, η, ζ при надлежащем выборе начальных значений, наверно, будут многозначными **.

Обстоятельство это, впрочем, нетрудно обнаружить и рассмотрением уравнения (7), составленного в предположении $\beta = 0$ при величинах a, b, c, f, g, h, определяемых формулами (6).

Действительно, уравнение это можно представить под видом

$$D_1 D_2 = 0$$

где

$$D_1 = \begin{vmatrix} Bk & -\gamma & \alpha \\ h & k-1 & 2i \\ -hi & -2i & k-1 \end{vmatrix} = B(k+2)(k-1)(k-3)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} Ak & 2(C-B)\,i & \gamma \\ 2(B-A)\,i & Ck & -\alpha \\ -h & hi & k-1 \end{vmatrix}$$

Если же вычислим определитель D_2, то найдем, что из трех корней уравнения $D_2 = 0$ один есть 2, а остальные определяются уравнением

$$ACk(k+1) + 2(B-A)(C-2B) - 2B(A-C)\frac{\alpha(\alpha+\gamma i)}{\alpha^2+\gamma^2} = 0 \qquad (9)$$

Но последнее при различных A и C, если ни α, ни γ не равны нулю, очевидно, не может обладать вещественными корнями.

---

* Аппельрот Г. Г. *По поводу § 1 мемуара С. В. Ковалевской „Sur le problème de la rotation...“ (Математический сборник, том XVI).*

** Некрасов П. А. *К задаче о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки (там же).*

Поэтому в рассматриваемом случае функции p, q, r, ξ, η, ζ могут быть однозначными при всяких начальных значениях только при равенстве нулю одного из чисел α и γ; а так как в силу (8) равенство одного из них нулю влечет за собой и равенство нулю другого, то однозначность эта возможна лишь тогда, когда рассматриваемый случай приводится к случаю Эйлера.

5. Рассмотрим теперь случай, когда A, B, C не все различны, и чтобы остановиться на чем-либо определенном, допустим, что $A = B$.

Мы можем тогда, нисколько не теряя в общности, одно из чисел α, β предположить нулем, ибо при $A = B$ к такому случаю всегда можно притти путем известного линейного преобразования уравнений (1).

Допустим поэтому, что $\beta = 0$.

Если бы в то же время было и $\alpha = 0$, то мы имели бы дело с случаем Лагранжа. Мы встретились бы с последним также и при $A = C$, ибо тогда имели бы $A = B = C$, а при этом условии, нисколько не теряя в общности, можно предположить нулями два из чисел α, β, γ.

Мы будем поэтому предполагать, что ни α, ни $A - C$ не нули.

Остановившись на этих предположениях, обращаемся к уравнению (7), соответствующему формулам (6).

Мы только что видели, что уравнение это, кроме четырех вещественных целых корней, имеет два корня, определяемые уравнением (9), которые при $A - C$ и α, отличных от нуля, могут быть вещественными только при $\gamma = 0$.

Мы должны поэтому допустить, что $\gamma = 0$, после чего, делая в уравнении (9) $A = B$ и полагая

$$\frac{A}{C} = n$$

приведем его к виду

$$k(k+1) = 2(n-1)$$

Отсюда заключаем, что n необходимо должно быть некоторым целым положительным числом.

Но в предположении $\gamma = 0$, которое мы должны были сейчас сделать, для a, b, c, f, g, h возможна следующая система значений:

$$a = b, \qquad b = 0, \qquad c = 2i$$

$$f = -\frac{2C}{\alpha + \beta i}, \quad g = -\frac{2Ci}{\alpha + \beta i}, \quad h = 0$$

подобная (6), а соответствующее ей уравнение, подобное (9), будет вида

$$BAk(k+1)+2(C-B)(A-2C)-2C(B-A)\frac{\beta(\beta+\alpha i)}{\beta^2+\alpha^2}=0$$

В рассматриваемом случае уравнение это обращается в следующее:

$$\left(k-\frac{2}{n}+2\right)\left(k+\frac{2}{n}-1\right)=0$$

и условие, чтобы корни его были целыми, требует, чтобы $2/n$ было числом целым.

Таким образом, приходим к выводу, что n и $2/n$ оба должны быть целыми положительными числами; а это возможно лишь в двух предположениях: $n=1$ и $n=2$.

Первое приводит к исключенному нами случаю Лагранжа, второе — к случаю С. В. Ковалевской.

6. Предыдущим исследованием теорема, формулированная в конце § 1, может считаться доказанной. Если поэтому может быть речь о каких-либо новых случаях однозначности функций p, q, r, ξ, η, ζ при вещественных A, B, C, α, β, γ и при отличных от нуля A, B, C, то только в предположении, что начальные значения этих функций подчиняются известным условиям.

В этом отношении в особенности должно обратить внимание на условие вещественности.

До сих пор для величин p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0 всякие значения рассматривались как возможные, и из нашего анализа не следует, что если величины эти предполагать вещественными, то только в известных трех случаях функции p, q, r, ξ, η, ζ всегда будут однозначными.

Действительно, на основании предыдущего мы можем только утверждать, что во всех случаях, отличных от этих трех, между системами значений p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0, *делающими модули разностей*

$$p_0-\frac{a}{t_0},\qquad q_0-\frac{b}{t_0},\qquad r_0-\frac{c}{t_0}$$

$$\xi_0-\frac{f}{t_0^2},\qquad \eta_0-\frac{g}{t_0^2},\qquad \zeta_0-\frac{h}{t_0^2}$$

при одной из рассматривавшихся систем значений a, b, c, f, g, h достаточно малыми, всегда найдутся такие, при которых функции p, q, r, ξ, η, ζ не будут однозначными.

Но для всех рассматривавшихся систем значений a, b, c, f, g, h (как и для всяких других, соответствующих решениям вида (4)), каково бы ни было t_0, из величин

$$\frac{a}{t_0}, \quad \frac{b}{t_0}, \quad \frac{c}{t_0}$$

$$\frac{f}{t_0^2}, \quad \frac{g}{t_0^2}, \quad \frac{h}{t_0^2}$$

хотя одна всегда выходит мнимой. Поэтому в числе указанных сейчас систем значений p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0 может вовсе не оказаться таких, для которых значения эти все были бы вещественными.

Чтобы воспользоваться нашею методой для решения вопроса в предположении вещественности p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0, мы должны для составления системы (3) вместо рассматривавшихся брать какие-либо другие решения системы (1) с вещественными начальными значениями для функций p, q, r, ξ, η, ζ.

Тогда, рассматривая уравнения (3), мы можем быть уверены, что всякое условие, необходимое для однозначности функций u, v, w, x, y, z при каких бы то ни было начальных значениях в какой-либо области, не содержащей особенных точек коэффициентов этих уравнений, есть вместе с тем условие, необходимое для однозначности функций p, q, r, ξ, η, ζ при всяких вещественных начальных значениях.

7. Из решений системы (1), обладающих требуемым свойством, мы можем указать, во-первых, все те, которые определяются уравнениями

$$A\frac{dp}{dt} = (B - C)\,qr$$

$$B\frac{dq}{dt} = (C - A)\,rp$$

$$C\frac{dr}{dt} = (A - B)\,pq$$

$$\xi = \eta = \zeta = 0$$

при вещественных p_0, q_0, r_0 и, следовательно, дают для p, q, r такие же выражения, как и в вопросе о вращательном движении твердого тела по инерции.

Для того чтобы в числе решений этого рода существовали обладающие особенными точками, как это необходимо для нашей методы, постоянные A, B, C должны быть все различными.

Тогда за исключением некоторых частных случаев, относящихся к значениям величин p_0, q_0, r_0, функции p, q, r будут обладать особенными точками и все эти особенные точки будут полюсами. Разложения же функций p, q, r вблизи всякого полюса $t=\tau$ по степеням $t-\tau$ будут вида

$$p = \frac{a}{t-\tau} + a' + a''(t-\tau) + \ldots$$

$$q = \frac{b}{t-\tau} + b' + b''(t-\tau) + \ldots$$

$$r = \frac{c}{t-\tau} + c' + c''(t-\tau) + \ldots$$

где a, b, c будут иметь те или другие величины, выводимые из формул (5).

Когда между числами α, β, γ хотя одно есть нуль, мы можем указать еще решения другого рода, а именно: решения, определяющие движения, свойственные физическому маятнику.

Если, например, мы имеем дело с случаем, когда $\beta=0$, решения эти определятся уравнениями

$$p = r = \eta = 0$$

$$B\frac{dq}{dt} = \gamma\xi - \alpha\zeta, \qquad \frac{d\xi}{dt} = -q\zeta, \qquad \frac{d\zeta}{dt} = q\xi$$

в предположении, что q_0, ξ_0, ζ_0 вещественны.

Для того чтобы между этими решениями существовали обладающие особенными точками, из чисел α и γ по крайней мере одно должно быть отличным от нуля.

Тогда, если исключить некоторые частные предположения относительно величин q_0, ξ_0, ζ_0, функции q, ξ, ζ будут обладать особенными точками, которые все будут полюсами, а разложения этих функций вблизи всякого полюса $t=\tau$ будут вида

$$q = \frac{b}{t-\tau} + b' + b''(t-\tau) + \cdots$$

$$\xi = \frac{f}{(t-\tau)^2} + \frac{f'}{t-\tau} + f'' + \cdots$$

$$\zeta = \frac{h}{(t-\tau)^2} + \frac{h'}{t-\tau} + h'' + \cdots$$

где b, f, h определятся по формулам (6).

Таковы будут решения, которыми мы теперь воспользуемся взамен решений типа (4).

8. Останавливаясь на каком-либо из указанных сейчас решений системы (1) и рассматривая соответствующую ему систему (3) вблизи какого-либо из полюсов ее коэффициентов, нетрудно заметить, что она будет принадлежать к классу систем линейных дифференциальных уравнений с исключительно правильными решениями.

Действительно, все решения системы (1), которыми мы здесь пользуемся, таковы, что вблизи всякого их полюса $t=\tau$ имеют место разложения вида

$$\begin{aligned}(t-\tau)\,p &= a + a'(t-\tau) + \cdots\\ (t-\tau)\,q &= b + b'(t-\tau) + \cdots\\ (t-\tau)\,r &= c + c'(t-\tau) + \cdots\\ (t-\tau)^2\xi &= f + f'(t-\tau) + \cdots\\ (t-\tau)^2\eta &= g + g'(t-\tau) + \cdots\\ (t-\tau)^2\zeta &= h + h'(t-\tau) + \cdots\end{aligned}$$

Поэтому, если положим

$$\begin{aligned} &u = x_1, & &v = x_2, & &w = x_3\\ &(t-\tau)\,x = x_4, & &(t-\tau)\,y = x_5, & &(t-\tau)\,z = x_6\end{aligned}$$

и затем, изменив для упрощения формул обозначение независимого переменного, вместо $t-\tau$ будем писать t, то система (3) приведется к виду

$$t\,\frac{dx_s}{dt} = P_{s1}(t)\,x_1 + P_{s2}(t)\,x_2 + \cdots + P_{s6}(t)\,x_6$$

$$(s=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$$

где $P_{sj}(t)$ означают функции t, способные при достаточно малом $|t|$ представляться рядами, расположенными по целым положительным степеням t.

Таким образом, система (3) привелась к каноническому виду систем линейных дифференциальных уравнений, все решения которых вблизи точки $t=0$ суть правильные *.

---

* Относительно таких систем уравнений можно между прочим указать на исследования Sauvage (Ann. scientif. de l'Ecole norm. super., série 3, t. 3, 5, et 6).

Для таких систем всегда легко найти все условия, необходимые и достаточные для того, чтобы во всяком их решении определяемые ими функции вблизи точки $t=0$ были однозначными.

Для нашей цели, однако же, нет надобности рассматривать все условия этого рода, а достаточно обратить внимание на одно из необходимых, которое состоит в том, чтобы функции x_s, определяемые следующею системой линейных дифференциальных уравнений:

$$t\,\frac{dx_s}{dt}=P_{s1}(0)\,x_1+P_{s2}(0)\,x_2+\cdots+P_{s6}(0)\,x_6 \qquad (11)$$

$$(s=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$$

во всяком решении этой системы были однозначными.

Но система (11) есть та самая, которую при различных предположениях относительно a, b, c, f, g, h мы рассматривали в предыдущих параграфах и исследование которой нас привело только к известным трем случаям.

Мы можем поэтому утверждать, что случаи эти суть единственные, в которых функции p, q, r, ξ, η, ζ однозначны при всяких вещественных начальных значениях.

9. В последних параграфах, предполагая p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0 вещественными, мы не подчиняли их, кроме того, никаким другим условиям.

Но в вопросе механики, который приводит к уравнениям (1), величины ξ, η, ζ означают косинусы углов некоторого направления с тремя взаимно перпендикулярными осями. Поэтому функции ξ, η, ζ, а, следовательно, и их начальные значения ξ_0, η_0, ζ_0 должны быть таковы, чтобы их сумма квадратов была равною 1.

Является вопрос, не существует ли каких-либо новых случаев, в которых функции p, q, r, ξ, η, ζ выходили бы однозначными при всяких вещественных p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0, удовлетворяющих соотношению

$$\xi_0^2+\eta_0^2+\zeta_0^2=1$$

и вопрос этот тем более уместен, что когда A, B, C все различны, а из чисел α, β, γ, ни одно не нуль, возможность многозначных решений уравнений (1) была нами доказана только в предположении, что численные значения величин ξ_0, η_0, ζ_0 достаточно малы.

Небольшое размышление приводит, однако, тотчас же к отрицательному ответу на этот вопрос.

Действительно, на основании предыдущего во всяком случае, который не приводится к одному из известных, трем величинам p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0 всегда можно приписать такие вещественные значения, при которых функции p, q, r, ξ, η, ζ (все или только некоторые) не будут однозначными.

Пусть же в каком-либо из таких случаев уравнениями

$$p = f_1(t), \quad q = f_2(t), \quad r = f_3(t)$$
$$\xi = \varphi_1(t), \quad \eta = \varphi_2(t), \quad \zeta = \varphi_3(t)$$

представляется одно из многозначных решений, соответствующих вещественным p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0.

Как и во всяком другом решении системы (1), функции ξ, η, ζ, определяемые этими уравнениями, будут удовлетворять соотношению

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \sigma^2$$

где σ — некоторое постоянное. Для нашего же решения постоянное это, наверно, будет отличным от нуля, ибо в противном случае вследствие предположенной вещественности величин ξ_0, η_0, ζ_0 мы имели бы

$$\xi_0 = \eta_0 = \zeta_0 = 0$$

а тогда решение наше необходимо совпадало бы с одним из решений, определяемых уравнениями (10), и, следовательно, противно допущенному, не было бы многозначным.

Если же σ не нуль, мы можем составить уравнения

$$p = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} f_1\left(\frac{t-t_0}{\sqrt{\sigma}} + t_0\right), \quad \xi = \frac{1}{\sigma}\varphi_1\left(\frac{t-t_0}{\sqrt{\sigma}} + t_0\right)$$
$$q = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} f_2\left(\frac{t-t_0}{\sqrt{\sigma}} + t_0\right), \quad \eta = \frac{1}{\sigma}\varphi_2\left(\frac{t-t_0}{\sqrt{\sigma}} + t_0\right)$$
$$r = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} f_3\left(\frac{t-t_0}{\sqrt{\sigma}} + t_0\right), \quad \zeta = \frac{1}{\sigma}\varphi_3\left(\frac{t-t_0}{\sqrt{\sigma}} + t_0\right)$$

и уравнениями этими определится, как нетрудно видеть, также некоторое решение системы (1). А решение это при σ положительном соответствует вещественным p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0, удовлетворяющим соотношению

$$\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2 = 1$$

и по крайней мере некоторые из функций $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$ выходят в нем, наверно, многозначными.

Мы приходим, таким образом, к следующему выводу.

Всякий раз, когда при вещественных A, B, C, α, β, γ и при отличных от нуля A, B, C мы не имеем дела ни с одним из трех известных случаев, начальным значениям p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0 функций p, q, r ξ, η, ζ всегда можно приписать такие вещественные величины, согласные с условием

$$\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2 = 1$$

при которых по крайней мере некоторые из функций p, q, r, ξ, η, ζ не будут однозначными.

---

3. Задача о существовании четвертого алгебраического интеграла задачи о вращении твердого тела около неподвижной точки (три алгебраических интеграла легко находятся для общего случая вращения) была поставлена Пуанкаре. Дело в том, что система уравнений (1) не содержит явно t и имеет последний множитель, равный единице (см., например, [31] Суслов. Теоретическая механика, отдел V). Поэтому для сведения задачи к квадратурам достаточно иметь четыре независимых первых интеграла. Ряд работ посвящен доказательству теоремы о том, что *четвертый алгебраический интеграл (речь идет об общих интегралах) существует в тех трех случаях, в которых имеются однозначные на всей плоскости t общие решения для p, q, r, γ, γ', γ''.*

В статье П. Я. Полубариновой-Кочиной [27] приводится доказательство этой теоремы, данное Бургатти [37], которое опирается на теорему Р. Лиувилля [58], исправленную Юссоном [47,48], допустившим, в свою очередь, ошибку в конце доказательства.

4. Ф. Кеттер [54] переложил более подробно содержание мемуара Ковалевской в части, относящейся к отысканию решения в гиперэллиптических функциях.

Г. Г. Аппельрот [1–6] использовал работу Кеттера при изложении задачи Ковалевской.

Обширная статья Аппельрота „Не вполне симметричные тяжелые гироскопы" в сборнике памяти Ковалевской, посвящена изложению главнейших достижений по теории их движения за последние 50 лет.

5. Этот мемуар мы приводим не полностью, а лишь в тех его частях, которые отличаются от соответствующих частей мемуара С. Ковалевской „Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки": это § 1 (полностью) и части § 4 и 9.

6. Н. Б. Делоне [12] дал более простой пример модели гироскопа С. В. Ковалевской. Он пишет: „Примером такого движения служит движение прямоугольного параллелепипеда размеров

$$2a < 2b < 2c$$

подчиненного условию

$$c = b\sqrt{3}$$

и подпертого в точке, лежащей на прямой, проходящей через центр тяжести параллельно ребру $2a$ и отстоящей от центра тяжести на расстоянии

$$x_0 = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{3}}$$

Такая опора может быть сделана посредством спицы, пропущенной сквозь параллелепипед“.

О модели гироскопа Ковалевской, предложенной Н. И. Мерцаловым, см. [17].

Литература

1. Аппельрот Г. Г. По поводу § 1 мемуара С. В. Ковалевской „Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe.“ Мат. сб., 1892, т. 16, стр. 483—507, 592—596.
2. Аппельрот Г. Г. Некоторые дополнения к сочинению Н. Б. Делоне „Алгебраические интегралы движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки“. Труды отд. физ. наук О-ва любителей естествознания, 1893, т. 6.
3. Аппельрот Г. Г. Задача о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Москва, 1893, 112 стр.
4. Аппельрот Г. Г. Простейшие случаи движения тяжелого несимметричного гироскопа С. В. Ковалевской. Мат. сб., 1909, т. 27, вып. 3, ст. I; Мат. сб., 1910, т. 27, вып. 4, ст. II.
5. Аппельрот Г. Г. Определение классов кинетически симметричных тяжелых гироскопов, способных допускать упрощенные движения, близкие к инерционному или к некоторому упрощенному движению гироскопа Лагранжа. Изв. Академии Наук СССР, серия физич., 1938, № 3, стр. 383—411.
6. Аппельрот Г. Г. Не вполне симметричные тяжелые гироскопы. Сборник памяти С. В. Ковалевской под ред. С. А. Чаплыгина и Н. И. Мерцалова. АН СССР, Л.— М., 1940, стр. 61—156.

7. Бобылев Д. Об одном частном решении дифференциальных уравнений вращения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Труды отд. физ. наук О-ва любителей естествознания, 1896, т. 8.

8. Вагнер В. В. О геометрии пространства конфигураций движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Ученые записки Саратовского университета, 1932.

9. Воронец П. В. Геометрическое исследование эйлерова случая вращения твердого тяжелого тела около неподвижной точки. Изв. Киевского ун-та, 1898, 113 стр.

10. Горячев Д. Н. О движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в случае $A=B=4C$. Мат. сб., 1900, т. 21, вып. 3, стр. 431—438.

11. Горячев Д. Н. Новое частное решение задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Труды отд. физ. наук О-ва любителей естествознания, т. IX.

12. Делоне Н. Б. Алгебраические интегралы движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Спб, 1892.

13. Делоне Н.Б. К вопросу о геометрическом истолковании интегралов движения твердого тела около неподвижной точки, данных С. В. Ковалевской. Мат. сб., 1892, т. 16, стр. 346—351.

14. Домогаров А. П. О свободном движении гироскопа. Спб, 1893, 175 стр.

15. Жуковский Н. Е. Локсодромический маятник Гесса. Труды отд. физ. наук О-ва любителей естествознания, 1892, т. 5; М., 1893, т. 6. Полное собр. соч., т. I, М. — Л., 1937, стр. 332 — 351, 45—93.

16. Жуковский Н. Е. Геометрическая интерпретация рассмотренного С. В. Ковалевской случая движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Мат. сб., 1896. т. 19. Полное собр. соч., т. I, М.—Л., 1937, стр. 384—432.

17. Жуковский Н. Е. Модель маятника Гесса. Труды отд. физ. наук О-ва любит. естествознания, 1899, т. 10. Полное собр. соч., М.—Л. 1937, стр. 455—459.

18. Ковалевская С. В. Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки. Перевод П. Я. Полубариновой-Кочиной в сборнике „Движение твердого тела вокруг неподвижной точки“ под ред. С. А. Чаплыгина и Н. И. Мерцалова. АН СССР, М.— Л., 1940, стр. 11 — 49.

19. Ковалевская С. В. Об одном свойстве системы дифференциальных уравнений, определяющей вращение твердого тела около неподвижной точки. Там же, стр. 50 — 60.

20. Колосов Г. В. Об одном свойстве задачи С. В. Ковалевской о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Труды отд. физ. наук О-ва любителей естествознания, 1901, т. 11, № 1, стр. 5—13.
21. Крылов А. Н. и Крутков Ю. А. Общая теория гироскопов и некоторых технических их применений. Л., 1932.
22. Ляпунов А. М. Об одном свойстве дифференциальных уравнений задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. Сообщение Харьковского математического о-ва, 1894, 2 серия, т. 4, стр. 123—140; 1895, т. IV, № 5 и 6.
23. Млодзеевский Б. К. О перманентных осях в движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Труды отд. физ. наук О-ва любителей естествознания, 1894, т. 7.
24. Млодзеевский Б. К. Об одном случае движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Мат. сб., 1896, т. 18, стр. 76—85.
25. Млодзеевский Б. К. и Некрасов П. А. Об условиях существования асимптотических периодических движений в задаче Гесса. Труды отд. физ. наук О-ва любителей естествознания, 1893, т. 6.
26. Некрасов П. А. К задаче о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Мат. сб., М., 1892, т. 16, стр. 508—517.
27. Некрасов П. А. Аналитическое исследование одного случая движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Мат. сб., 1896, т. 18, вып. 12, стр. 161—274.
28. Полубаринова-Кочина П. Я. Об алгебраических интегралах и однозначных решениях задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки. Сборник памяти С. В. Ковалевской под ред. С. А. Чаплыгина и Н. И. Мерцалова. АН СССР, 1941, стр. 157—186.
29. Слудский Ф. О движении центра тяжести тяжелого твердого тела, вращающегося около неподвижной точки. Мат. сб., т. 17, вып. 4, 1895, стр. 791—796.
30. Стеклов В. А. Один случай движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. Труды отд. физ. наук О-ва любителей естествознания, 1896, т. 8.
31. Стеклов В. А. Новое частное решение дифференциальных уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. Труды отд. физ. наук О-ва любителей естествознания, 1899, т. 10, № 1, стр. 1—3.
32. Суслов Г. К. Теоретическая механика. Изд. 3, посмертное, ОГИЗ, М.—Л., 1944 (Случай С. Ковалевской, стр. 563—575); а также статья в сб. Труды отд. физ. наук О-ва любителей естествознания, т. 7, 1894.

33. Чаплыгин С. А. Линейные частные интегралы задачи о движении твердого тела, подпертого в одной точке. Труды отд. физ. наук О-ва любителей естествознания, 1898, т. 10. Собр. соч., т. I, Л., 1933, стр. 235—240.
34. Чаплыгин С. А. Новый случай вращения тяжелого твердого тела, подпертого в одной точке. Труды отд. физ. наук О-ва любителей естествознания, 1901, т. 10. Собр. соч., т. I, Л., 1933, стр. 241—245.
35. Чаплыгин С. А. Новое частное решение задачи о вращении тяжелого тела вокруг неподвижной точки. Труды отд. физ. наук О-ва любителей естествознания, 1903, т. 11. Собр. соч., т. I, Л., 1933, стр. 246—251.
36. Чаплыгин С. А. По поводу локсодромического маятника Гесса. Труды отд. физ. наук О-ва любителей естествознания, 1895, т. 5. Собр. соч., т. I, Л., 1933, стр. 252—253.
37. Шифф В. Об уравнениях движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. Мат. сб., 1903, вып. 2, т. 24, стр. 169—177.
38. Burgatti P. Dimostrazione della non esistenza d'integrali algebrici (oltre i noti) nel probleme del moto d'un corpo pesante intorno a un punto fisso. Circ. Mat. Palermo, 1910, v. XXIX, p. 369—377.
39. Euler L. Découverte d'un nouveau principe de Mécanique, Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin, 1750, 1758.
40. Field. On the unsummetrical top. Acta math., v. 56, 62.
41. Gebelein H. Über den unsymmetr. schweren Kreisel. Ann. d. Phys., 1932, Bd 12, S. 889.
42. Gorliss J. On the unsummetric top. Acta math., 1932, v. 59, p. 423—441; 1934, v. 62, p. 301—312.
43. Grammel R. Die Stabilität staudeschen Kreiselbewegungen. Math. Ztschr., 1920, Bd 6.
44. Grammel R. Der Kreisel, seine Theorie und seine Anwendungen. Brnschw., 1920.
45. Hamel. Über den allgemeinen schweren Kreisel. ZAMM, 1947, 5—6.
46. Hess W. Über die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neue particüläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt. Math. Annalen, 1890, Bd 37, H. 2.
47. Hill E. L. Rotations of a rigid body about a fixed point. Amer. Journ. Phys., 1945, v. 13, June, p. 137—140.

48. Husson E. Recherche des intégrales algébriques dans le mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe. Annales de la Faculté des sciences de Toulouse, 2 série., 1906, t. VIII, p. 73—152, et Thèses présentées à la F. des S. de Paris. 1905.
49. Husson E. Sur un théorème de M. Poincaré, relativement au mouvement d'un solide pesant. Acta mathematica, 1908, t. 31, p. 71—88.
50. Klein und Sommerfeld A. Theorie des Kreisels. Lpz., 1923.
51. Kowalevsky S. Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe. Acta math., Stockholm, 1889, t. 12, p. 177—232.
52. Kowalevski S. Sur une propriété du système d'équations différentielles qui définit la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe. Acta Math., Stockholm, 1890, v. 14. H. 1, p. 81—93.
53. Kowalewsky S. Mémoires sur un cas particulier du problème de la rotation d'un corps pesant autour d'un point fixe, où l'intégration s'effectue à l'aide de fonctions ultraelliptiques du temps. Mémoires présentés par di ers sa ants à l'Académie des sciences de l'Institut national de France. Paris, 1890, t. 31, p. 1—62.
54. Kowalewski N. Eine neue particuläre Lösung der Differentialgleichungen der Bewegung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt. Math. Ann., 1908, Bd 65, S. 528—537.
55. Kötter F. Sur le cas traité par M-me Kowalewski de rotation d'un corps solide autour d'un point fixe. Acta Mathematica., 1893, v. 17, H. 1—2.
56. Lagrange J. L. Méchanique analytique. Paris, 1788, t. 2.
57. Lazzarino O. Interpolazione cinematica e realizzazione meccanica del problema di S. Kowalewski retativo al moto di un corpo rigido pesante intorno ad un punto fisso. Rend. d. Accad. d. sc. fis. e mat. (Sezione d. Societa Reale di Napoli). Napoli, 1911, 40 (3), 17, p. 68—146.
58. Levi-Civita. Sui moti stazionarii di un corpo rigido nel caso della Kovalevsky. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1901, v. 10.
59. Liebmann H. Classification der Kreiselprobleme. Math. Ann.. 1896, Bd XLVII, S. 445—530.
60. Liouville R. Sur le mouvement d'un corps solide pesant suspendu par l'un de ses points. Acta math , 1896, t. 20, p. 239—284.
61. Mettler E. Periodische und asymptotische Bewegungen des unsymmetrischen schweren Kreisels. Math. Ztschr., 1937, Bd 43, H. 1.
62. Nekrassoff P. A. Recherches analytiques d'un cas de rotation d'un solide autour d'un point fixe. Math. Ann., 1896., Bd XLVII, S. 445—530.

63. Padova E. Del moto di rotatione dei corpi rigidi. Atti d. R. Acc. d. Lineci, Rend. ser. 5a. 1893, t. II, sem. 2 (p.7—12; 1894, t. III; 1885, t. IV).
64. Poinsot. Théorie nouvelle de la rotation des corps. Journal de Liouville, 1851, t. XVI.
65. Poisson S. D. Traité de mécanique. Paris, 1813, t. 11.
66. Stäckel P. Über die Gestalt der Bahnkurven bei einer Klasse dynamischer Probleme. Math. Annalen, 1902, Bd 54; 1908, Bd 65, S. 538—555; Encycl. d. math. Wissenschaften.
67. Staude O. Über permanente Rotationsaxen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1894, Bd 113, H. 4.
68. Tannenberg W. Sur le mouvement d'un corps solide pesant autour d'un point fixe; cas particulier signalé par M-me Kowalewski. Bordeaux, 1898.



СПИСОК НАУЧНЫХ РАБОТ СОФЬИ КОВАЛЕВСКОЙ

1. К теории уравнений в частных производных. Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Inaugural Dissertation 1874; а также Journal für die reine und angewandte Mathematik, Berlin, 1875, Bd 80, S. 1—32.

2. О приведении некоторого класса абелевых интегралов третьего ранга к эллиптическим интегралам. Über die Reduction einer bestimmten Klasse Abel'schen Integrale 3-en Ranges auf elliptische Integrale. Acta Math., Стокгольм, 1884, т. 4, стр. 393—414.

3. О распространении света в кристаллической среде. Sur la propagation de la lumière dans un milieu cristallisé. Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences, Paris, 1884, t. 98, p. 356—357, а также Om ljusets fortplantning uti ett kristalliniskt medium. Ofversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlinger, Стокгольм, 1884, т. 41, стр. 119—121.

4. О преломлении света в кристаллических средах. Über die Brechung des Lichtes in cristallinischen Mitteln. Acta Math., Стокгольм, 1883, Bd 6, S. 249—304.

5. Добавления и замечания к исследованию Лапласа о форме кольца Сатурна. Zusätze und Bemerkungen zu Laplace's Untersuchung über die Gestalt der Saturnringe. Astronomische Nachrichten, Kiel, 1885, B. 111, S. 37—48.

6. Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки. Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe. Acta mathematica, Стокгольм, 1889, т. 12, стр. 177—232. Русский перевод П. Я. Полубариновой-Кочиной. Сборник „Движение твердого тела вокруг неподвижной точки“ под редакцией С. А. Чаплыгина и Н. И. Мерцалова, АН СССР, М. — Л., 1940, стр. 11—49.

7. Об одном свойстве системы дифференциальных уравнений, определяющей вращение твердого тела около неподвижной точки. Sur une propriété du système d'équations différentielles qui définit la rotation

d'un corps solide autour d'un point fixe. Acta math., Стокгольм, 1890, т. 14, стр. 81—93. Русский перевод П. Я. Полубариновой-Кочиной. Сборник „Движение твердого тела вокруг неподвижной точки" под редакцией С. А. Чаплыгина и Н. И. Мерцалова, АН СССР, М. — Л., 1940, стр. 50—60.

8. Мемуар об одном частном случае задачи о вращении тяжелого тела вокруг неподвижной точки, когда интегрирование производится с помощью ультраэллиптических функций времени. Mémoire sur un cas particulier du problème de la rotation d'un corps pesant autour d'un point fixe, où l'intégration s'effectue à l'aide de fonctions ultraelliptiques du temps. Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut national de France, Paris, 1890, t. 31, p. 1—62.

9. Об одной теореме г. Брунса, Sur un théorème de M. Bruns. Acta math., Stockholm, 1891, Bd 15, S. 45—52. Notes de Mémoires présentés à la conférence de Mathématiques de l'université de Stockholm, t.I.

КУРСЫ, ПРОЧИТАННЫЕ С. В. КОВАЛЕВСКОЙ В СТОКГОЛЬМСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

1. Теория уравнений в частных производных (осень 1884).
2. Теория алгебраических функций по Вейерштрассу (весна 1885).
3. Элементарная алгебра (весна 1885).
4. Теория абелевых функций по Вейерштрассу (с осени 1885 до весны 1887).
5. Теория потенциальных функций (весна 1886).
6. Теория движения твердого тела (осень 1886 и весна 1887).
7. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, по Пуанкаре (осень 1887 и весна 1888).
8. Теория тета-функций по Вейерштрассу (весна 1888).
9. Приложения теории эллиптических функций (осень 1888).
10. Теория эллиптических функций по Вейерштрассу (осень 1889).
11. Теория уравнений в частных производных (весна 1890).
12. Приложение анализа к теории целых чисел (осень 1890).

(Список взят из статьи Миттаг-Леффлера, Acta math., t. 16, p. 385—392).



СОФЬЯ ВАСИЛЬЕВНА КОВАЛЕВСКАЯ

(Очерк научной деятельности)

П. Я. Полубаринова-Кочина

В истории науки немного найдется женских имен, которые были бы известны всему миру, о которых знал бы, хотя бы понаслышке, каждый образованный человек. К числу таких женщин, пользовавшихся мировой известностью, принадлежала Софья Васильевна Ковалевская, замечательная русская женщина, своею деятельностью „немало содействовавшая прославлению русского имени“, как сказал о ней Н. Е. Жуковский.

1. С. В. Ковалевская родилась 3(15) января 1850 года. Отец ее, Василий Васильевич Корвин-Круковский, был генерал-лейтенантом артиллерии. Ее прадед по матери, Ф. И. Шуберт, был известным в свое время петербургским астрономом,* действительным членом Академии Наук; дед ее, Ф. Ф. Шуберт, почетный член Академии Наук — генералом и топографом.

Детство С. В. Ковалевская провела в имении родителей, в селе Палибине Витебской губернии. Она получила хорошее по тому времени воспитание и образование. Англичанка М. Ф. Смит, обучавшая ее французскому и английскому языкам, энергично проводила по отношению к Софе, как называли девочку, суровую систему воспитания, что содействовало приобретению Ковалевской с детства навыков к

---

* Известно, что он вел переписку с Лапласом, Гауссом и Бесселем (см. Научное наследство. Т. I, 1948).

систематической и упорной работе. Впрочем, целеустремленность и настойчивость в достижении поставленной цели были заложены в природе Ковалевской. Пользуясь ее собственным выражением, можно сказать, что „интенсивность составляла самую сущность ее натуры".

Преподавание по всем наукам вел в семье Корвин-Круковских домашний учитель Иосиф Игнатьевич Малевич. По отзыву брата Ковалевской, Федора Васильевича Корвин-Круковского, это был в полном смысле слова образцовый учитель, с громадным опытом, умевший возбуждать интерес к предмету и заставлять учеников „полюбить науку и стремиться к дальнейшему усовершенствованию". Занятия с Малевичем „были первым прочным основанием, так сказать краеугольным камнем в здании умственного развития Софы".

В своих воспоминаниях И. И. Малевич пишет:

„При первой встрече с моею даровитою ученицей, в октябре 1858 года, я видел в ней восьмилетнюю девочку, довольно крепкого сложения, милой и привлекательной наружности, в карих глазах которой светился восприимчивый ум и душевная доброта. В первые же учебные занятия она обнаружила редкое внимание, быстрое усвоение преподанного, совершенную, так сказать, покладливость, точное исполнение требуемого и постоянно хорошее знание уроков. Развивая ее способности... я не мог, однако ж, заметить при первых уроках арифметики особых способностей к этому предмету: все шло так, как с прежними моими ученицами, и даже я был смущен по следующему случаю. Однажды, за обедом, генерал спросил свою любимую дочь: „Ну что, Софа, полюбила ли ты арифметику?" — „Нет, папочка," был ее ответ... Не прошло четырех месяцев, как ученица моя, почти на такой же вопрос отца, сказала: „Да, папочка, люблю заниматься арифметикою, она доставляет мне удовольствие".

„...Прошли три-четыре года всегда успешных занятий без всяких выдающихся эпизодов, но когда дошли мы в геометрии до отношения окружности круга к диаметру... уче-

ница моя, излагая данное при следующем уроке, к удивлению моему, пришла совсем другим путем и особенными комбинациями к тому же самому выводу". Малевич признается, что когда он указал на несколько окольный характер пути, избранного ученицей, юный математик покраснел и заплакал; „но, — прибавляет он, — это были первые и последние слезы ученицы за уроком во все время моего десятилетнего преподавания". Ковалевская характеризует своего учителя как человека „тихого и знающего", который „давал превосходные уроки". Малевич пишет, что арифметикой Ковалевская занималась два с половиной года, после чего был пройден курс алгебры Бурдона в двух томах; в половине курса алгебры приступили к геометрии; на шестом году обучения были закончены планиметрия и стереометрия.

О первых проблесках интереса к математике Ковалевская упоминает впервые, говоря о своих детских беседах с любимым дядей Петром Васильевичем Корвин-Круковским, великим начетчиком:

„Хотя он математике никогда не обучался, но питал к этой науке глубочайшее уважение. Из разных книг набрался он кое-каких математических сведений и любил пофилософствовать по их поводу, причем ему часто случалось размышлять вслух в моем присутствии. От него услышала я, например, в первый раз о квадратуре круга, об асимптотах, к которым кривая постоянно приближается, никогда их не достигая, и о многих других вещах подобного же рода,—смысла которых я, разумеется, понять еще не могла, но которые действовали на мою фантазию, внушая мне благоговение к математике, как к науке высшей и таинственной, открывающей перед посвященными в нее новый, чудесный мир, недоступный простым смертным.

„Говоря об этих первых моих соприкосновениях с областью математики, я не могу не упомянуть об одном очень курьезном обстоятельстве, тоже возбудившем во мне интерес к этой науке.

„Когда мы переезжали на житье в деревню, весь дом пришлось отделать заново и все комнаты оклеить новыми обоями. Но так как комнат было много, то на одну из наших детских комнат обоев нехватило, а выписывать-то обои приходилось из Петербурга; это было целой историей, и для одной комнаты выписывать решительно не стоило. Все ждали случая, а в ожидании его эта обиженная комната так и простояла много лет, с одной стеной, оклеенной простой бумагой. Но, по счастливой случайности, на эту предварительную оклейку пошли именно листы литографированных лекций Остроградского о дифференциальном и интегральном исчислении, приобретенные моим отцом в его молодости.

„Листы эти, испещренные странными непонятными формулами, скоро обратили на себя мое внимание. Я помню, как я в детстве проводила целые часы перед этой таинственной стеной, пытаясь разобрать хоть отдельные фразы и найти тот порядок, в котором листы должны бы следовать друг за другом. От долгого, ежедневного созерцания, внешний вид многих из формул так и врезался в моей памяти, да и самый текст оставил по себе глубокий след в мозгу, хотя в самый момент прочтения он и остался для меня непонятным.

„Когда много лет спустя, уже пятнадцатилетней девочкой, я брала первый урок дифференциального исчисления у известного преподавателя математики в Петербурге, Александра Николаевича Страннолюбского, он удивился, как скоро я схватила и усвоила себе понятия о пределе и о производной — „точно я наперед их знала“. Я помню, он именно так и выразился. И дело, действительно, было в том, что в ту минуту, когда он объяснял мне эти понятия, мне вдруг живо припомнилось, что все это стояло на памятных мне листах Остроградского, и самое понятие о пределе показалось мне давно знакомым“.

Следует отметить мнение Ф. В. Корвин-Круковского, согласно которому на пути духовного развития Софы встречались некоторые серьезные препятствия, состоявшие в том, что

воспитатели ее, в частности англичанка, „противились слишком свободному развитию ее ума и старались вести ее обычным рутинным путем, который никак не мог удовлетворить ее пылкую и восприимчивую натуру“. Дело в том, что в семье старались дать ей образование соответственно понятиям своей среды, т. е. „стремились сделать из Софы светскую барышню“. Софе приходилось вести некоторую борьбу за свободу своего образования, что, по мнению брата, пошло на пользу такой натуре, какая была у его сестры, и выработало в ней упорство и силу воли. Семью Корвин-Круковских посещали профессор математики Т. П. Лавров и профессор физики Н. П. Тыртов. Последний обратил внимание на математические способности четырнадцатилетней Софы, которая пыталась, не зная тригонометрии, самостоятельно разобраться в смысле тригонометрических формул, встретившихся ей в курсе физики. С этого момента наблюдается некоторое изменение во взглядах отца Софы на ее образование. Гордый признанием у дочери выдающихся способностей, он разрешил ей брать уроки высшей математики у известного преподавателя того времени, А. Н. Страннолюбского, что Софа и делала, начиная с 15-летнего возраста, во время зимних приездов ее семьи в Петербург. Есть сведения, что юная Ковалевская обращалась за советами по поводу занятий математикой к П. Л. Чебышеву.

2. В то время среди женщин развивалось стремление к образованию, получить которое они могли лишь в некоторых заграничных университетах, так как высших школ для женщин в России еще не существовало, а в мужские их, за редкими исключениями, не пускали. С целью освобождения от родительской опеки некоторые девушки заключали фиктивные браки с людьми, которые сочувствовали женскому движению и предоставляли своим фиктивным женам полную свободу.

В возрасте 18 лет Ковалевская фиктивно вышла замуж за Владимира Онуфриевича Ковалевского, одного из представителей либеральной интеллигенции, занимавшегося в то время

издательской деятельностью. Впоследствии их брак стал фактическим. Интересны некоторые подробности этого брака. Дело в том, что фиктивного мужа искали для Анюты, сестры, которая была старше Софы на 7 лет и обладала литературным талантом. Но когда Владимира Онуфриевича познакомили с обеими сестрами, то он решительно заявил, что женится только на младшей, которая его совершенно очаровала, и женившись на которой, он бы принес пользу науке. Он пишет брату: „Несмотря на свои 18 лет, воробышек (так называли Софу за ее моложавость и малый рост) образована великолепно, знает все языки, как свой собственный, и занимается до сих пор главным образом математикой, причем проходит уже сферическую тригонометрию и интегралы — работает, как муравей, с утра до ночи, и при всем том жива, мила и очень хороша собой". Под влиянием своего брата, зоолога А. О. Ковалевского, Владимир Онуфриевич стал заниматься естественными науками. Своими работами, сделанными через несколько лет после знакомства с Софьей Васильевной, В. О. Ковалевский положил начало новой эволюционной палеонтологии. В настоящее время его научные заслуги ценятся чрезвычайно высоко, однако научный путь его, так же как вся его жизнь в последние годы, был трудным и тернистым.

После свадьбы, осенью 1868 года, Ковалевские отправились в Петербург, где начался новый период их жизни. Каждый из них начал усердно заниматься своей наукой. Ковалевская добилась разрешения слушать лекции И. М. Сеченова по физиологии и заниматься анатомией у Грубера в Медико-хирургической академии (что мало соответствовало ее основным интересам). Повидимому, твердой уверенности в прочности полученного разрешения не было, так как А. О. Ковалевский давал Софье Васильевне шутливый совет переодеться мальчиком, если ее выгонят с лекций Сеченова. В начале шестидесятых годов в некоторых высших учебных заведениях России начали допускать отдельных женщин к слушанию лекций (об этом упоминает К. А. Тимирязев, рассказывая о

своей встрече с Ковалевской в Гейдельберге, когда она там слушала лекции), потом это разрешение то отменялось, то опять давалось. Несомненно, что Софья Ковалевская сделалась бы ученицей гениального русского ученого П. Л. Чебышева, если бы ей разрешили слушать лекции в университете, но это разрешение не было дано.

Не удовлетворившись занятиями в Петербурге, в 1869 году Ковалевская с мужем поехала за границу.

3. Стремление Ковалевской к образованию поддерживалось в ней общим настроением передовой части русского общества того времени.

Так, П. Н. Ариян пишет:

„Навряд ли одна любовь к математике и знанию вообще могла подвинуть С. В. на такую борьбу с окружающим; в подмогу к этому явилось то просветительное движение в обществе, которое началось в 60-х годах, когда стремились учиться не столько ради самого знания, сколько ради тех результатов, которые оно могло дать, подготовляя для работы на пользу родины. Учиться, заниматься, чтобы затем с удвоенными силами служить родине, помогать ей в тяжелой освободительной борьбе с мраком и угнетением, за свободу и просвещение, во имя человеческого счастья, — вот какие стремления одушевляли женскую молодежь, которая во имя этих идеалов рвала всякие путы и с легким чемоданчиком, и без всяких часто средств, стремилась в гостеприимные швейцарские университеты, наперекор судьбе и обществу. Софья Ковалевская говорила впоследствии: „О, это было такое счастливое время! Мы так сильно увлекались новыми идеями, открывавшимися перед нами, мы были так глубоко убеждены, что существующее состояние общества не может долго продлиться, мы уже видели в недалеком будущем наступление нового времени, времени свободы и всеобщего просвещения, мы мечтали об этом времени, мы были глубоко убеждены, что оно наступит! И нам была невероятно приятна мысль, что мы уже живем одною общею мыслью с этим временем“.

В России Ковалевская была „светлой точкой, к которой устремлялись глаза девушек, желавших учиться". Тем более это было, когда она уехала за границу. В Гейдельберге Ковалевская поселилась вместе со своей подругой, Юлией Всеволодовной Лермонтовой, занимавшейся химией. Первое время с ними жила сестра Ковалевской, Анна. Последняя вскоре уехала в Париж, где она сблизилась с революционными кружками и вышла замуж за В. Жаклара, вместе с которым принимала активное участие в борьбе Парижской Коммуны в 1871 году.

В Гейдельберге С. В. Ковалевская в течение трех семестров изучала математику (слушала курс по теории эллиптических функций) у Кенигсбергера, ученика знаменитого в то время К. Вейерштрасса, и посещала лекции по физике и математике Кирхгофа, Дю-Буа-Реймона и Гельмгольца. Кирхгоф и Кенигсбергер разрешили ей посещать их семинары по физике и математике.

В 1870 году Ковалевская поехала в Берлин, где хотела слушать лекции самого Вейерштрасса. Это ей не удалось, так как в Берлинский университет женщин совершенно не допускали.

Однако, получив от Кенигсбергера блестящие отзывы о Ковалевской, Вейерштрасс согласился давать ей частные уроки. Это было большим успехом Ковалевской. Вейерштрасс придерживался консервативных взглядов на женское образование и был противником допущения женщин в германские университеты. По свидетельству Феликса Клейна, быть учеником Вейерштрасса было не легко, так как „его интеллектуальное превосходство скорее подавляло его слушателей, чем толкало их на путь самостоятельного творчества". Оценивая значение Вейерштрасса в то время (ему было 55 лет, когда он начал занятия с 20-летней Ковалевской), Ф. Клейн говорит, что он „пользовался абсолютным и непререкаемым авторитетом, все его теории принимались его слушателями как непреложные нормы мышления"... „Из духа противоречия я" (так же как и Софус Ли) „не слушал Вейерштрасса, — теперь я жалею об этом".

Ковалевская сделалась любимой ученицей Вейерштрасса. На занятиях он повторял ей содержание лекций, прочитанных студентам, делился неопубликованными работами и обсуждал новости науки. Рассматривая с нею вопрос о неевклидовых геометриях — Лобачевского и Римана, Вейерштрасс рассказывает ей о построении своей геометрии конечного мира (о ней сохранилось мало сведений), к которой, по его признанию, остальные его товарищи—математики питали мало симпатии.

В письме от 20 августа 1873 года, написанном на острове Рюгене, где Вейерштрасс проводил свой отдых, он говорит, что часто вспоминает Соню и желал бы видеть ее около себя.

„Как чудесно мы оба, — ты с твоей полной фантазии душой, и я, возбужденный и освеженный твоим энтузиазмом, могли бы грезить и мечтать здесь над многими загадками, которые нам остается разрешить, над конечными и бесконечными пространствами, над устойчивостью системы мира и над остальными великими задачами математики и физики будущего. Но я уже давно научился считаться с тем, что не всякий прекрасный сон осуществляется“. При чтении такого письма становятся понятными слова Ф. Клейна: „Мы должны быть благодарны Софье Ковалевской за то, что она вывела Вейерштрасса из его состояния замкнутости“.

Интересно, что Ковалевская, очень ревнивая по натуре, взяла с Вейерштрасса слово, что он не будет заниматься математикой ни с какой другой женщиной. Однако потом она сама, с женской непоследовательностью, собиралась послать ему какую-то симпатичную ученицу, на что Вейерштрасс ответил, что он, помня свое обещание, уже отказал одной немецкой даме, которая просила его заниматься с ней геометрией, и что он хочет сдержать слово, данное им Соне.

Ковалевская занималась у Вейерштрасса четыре года, с перерывами на время поездок в Париж (весною 1871 года), и в Россию (летом 1872 и 1873 года, после болезни Ковалевской). Пребывание ее в деревне, в имении родителей, укрепило ее здоровье, сильно расшатанное чрезмерными занятиями.

Во время поездки в Швейцарию Ковалевская в Цюрихе познакомилась с Г. А. Шварцем и у нее явилось желание работать вместе с ним. Она считала, что с идеями Вейерштрасса она уже освоилась, а прелесть новизны ее всегда привлекала. Шварц же очень заинтересовался Ковалевской, о которой он слышал еще раньше и приезда которой в Цюрих ждал с нетерпением. Однако все же она осталась верной своему старому учителю.

Вейерштрасс восхищался математическими способностями своей ученицы: „Что касается математического образования Ковалевской, то могу заверить, что я имел очень немногих учеников, которые могли бы сравниться с нею по прилежанию, способностям, усердию и увлечению наукой“, писал он Фуксу.

4. В 1874 г., после четырех лет обучения, Вейерштрасс возбудил перед Геттингенским университетом вопрос о присуждении С. В. Ковалевской степени доктора философии in absentia (т. е. заочно) и без экзаменов. В ряде писем, посланных по этому поводу профессорам Геттингенского университета, Вейерштрасс дает характеристику трех работ, представленных Ковалевской, из которых каждая, по его мнению, была достаточна для получения искомой степени.

Первая из этих работ, „К теории уравнений в частных производных“, содержит доказательство теоремы существования голоморфного решения системы уравнений в частных производных нормального вида. Известно, что Коши в 1842 году дал теорему существования для линейной системы уравнений в частных производных и указал, как привести к этому случаю нелинейную систему. Однако Ковалевская не знала этих работ Коши.

Доказательство Ковалевской проще доказательства Коши, и, по словам Пуанкаре, она дала теореме ее окончательную форму. Теперь эту теорему называют теоремой Коши — Ковалевской, и она входит в основные курсы анализа. Особенно интересным в работе является пример, данный Ковалевской,

простейшего уравнения (уравнения теплопроводности), для которого задача Коши, если это уравнение написано не в нормальной форме, не имеет голоморфного решения, — это было значительное открытие для того времени.

Многих занимал вопрос о степени самостоятельности Софьи Ковалевской при разработке темы, поставленной Вейерштрассом. По этому поводу Вейерштрасс пишет Дю-Буа Реймону 25 сентября 1874 года: „В диссертации, о которой идет речь, я — не считая того, что поправил многочисленные грамматические ошибки, — не принимал другого участия, кроме того, что поставил задачу перед автором. И в этом отношении я тоже должен заметить, что я собственно не ожидал другого результата по сравнению с известным из теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Я был, — чтобы оставаться при простейшем случае, — того мнения, что степенной ряд от многих переменных, удовлетворяющий формально уравнению в частных производных, должен также быть всегда сходящимся внутри некоторой области и должен, следовательно, представлять тогда функцию, действительно удовлетворяющую дифференциальному уравнению. Что это не так, как Вы видите из рассмотренного в диссертации примера уравнения $\partial u / \partial t = \partial^2 u / \partial t^2$, было открыто, к моему большому изумлению, моей ученицей совершенно самостоятельно, — и притом сначала для гораздо более сложных дифференциальных уравнений, чем приведенное, — так что она даже сомневалась в возможности получения общего результата; кажущиеся такими простыми средства, которые она нашла для преодоления возникшего таким образом затруднения, я высоко оценил, как доказательство ее правильного математического чутья“.

Вторая работа, представленная Ковалевской для присуждения степени доктора, относится к вопросу о форме кольца Сатурна. Это „Дополнения и замечания к исследованию Лапласа о форме кольца Сатурна“. Здесь Ковалевская развивает исследование Лапласа, который принимал, что кольцо Сатурна состоит из нескольких жидких колец, не ока-

зывающих влияния друг на друга. Лаплас получил, что поперечное сечение кольца имеет форму эллипса. Ковалевская решала задачу при более общих предположениях и получила — во втором приближении — яйцевидную форму поперечного сечения кольца. Эта работа была подробно изложена Тиссераном в его курсе небесной механики. Основной результат работы приведен в курсе гидродинамики Ламба.

Относительно третьей из представленных работ, „О приведении одного класса абелевых интегралов третьего ранга к интегралам эллиптическим“, Вейерштрасс пишет, что для нее творческий дар был менее нужен, однако здесь потребовалось основательное знакомство с теорией абелевых функций, которая относится к числу труднейших теорий математического анализа. Ковалевская, в частности, решает вопрос о том, при каких условиях ультраэллиптический интеграл, содержащий полином восьмой степени, приводится к эллиптическому интегралу первого рода. Аналогичный, более простой тип ультраэллиптических интегралов был изучен ранее Кенигсбергером.

5. С. В. Ковалевская получила степень доктора с высшей похвалой — summa cum laude. Прошли пять лет упорного труда. За эти годы Ковалевская совершила несколько путешествий, была в Лондоне, а также в Париже, где в период Парижской Коммуны она с мужем принимала участие в освобождении из тюрьмы Жаклара. Ее жизнь была мало комфортабельной из-за неопытности и неуменья устраиваться.

Ковалевские вернулись в Россию и стали жить в Петербурге. Вейерштрасс предвидел, что на некоторое время его ученица отойдет от математики, когда вернется на родину, в свою семью, где будет вести светский образ жизни и где молодую женщину будут привлекать все соблазны света, от которого она так героически отказалась во имя служения науке. Вейерштрасс писал своей ученице: „Отдайся смело во власть непривычных удовольствий столичной жизни, если только они тебе самой нравятся и если ты не поддаешься лишь внешним влияниям. Я знаю, что ты не изменишь науке.

Если даже твоя потребность творчества временно ослабеет, что вполне понятно, то затем она вспыхнет еще сильнее".

Период отчуждения Ковалевской от математики был более продолжительным, чем ожидал Вейерштрасс. Все обстоятельства русской жизни того времени способствовали этому отчуждению. Ковалевская, получившая блестящее математическое образование, не могла найти применения своим знаниям у себя на родине. Степень доктора философии, полученная в то время за границей, соответствовала примерно нашей степени кандидата. Мужчина, получивший эту степень, мог бы преподавать в России в университете; он имел возможность защищать магистерскую и докторскую диссертации, после чего мог занять соответствующую кафедру по специальности. Для Софьи Ковалевской все это было недоступно. Она могла лишь преподавать арифметику в младших классах женской гимназии. Ковалевская не была привлечена к преподаванию на Высших женских курсах, открытых в 1878 году в Петербурге, хотя над учреждением этих первых в России курсов Софья Васильевна работала еще в 1868—1869 годах.

В России Ковалевская отошла от серьезных занятий математикой. Она вела светский образ жизни. В то время некоторая часть русского общества, по словам Ковалевской, была охвачена „духом наживы и разных коммерческих предприятий. Это течение захватило и моего мужа и отчасти, должна покаяться в своих грехах, и меня самое". Ковалевские хотели обеспечить себя материально, чтобы потом заниматься наукой и, может быть, открыть высшие женские курсы.

Ковалевские устраивали вечера, на которых сходились ученые и писатели. Среди них были Менделеев, Сеченов и Бутлеров, Чебышев и Столетов, Тургенев и Достоевский и другие представители науки и литературы.

Ковалевская отличалась разносторонним образованием и была блестящей собеседницей. Она стала заниматься литературно-публицистической работой, сотрудничая в газетах, где помещала научные очерки и театральные рецензии.

Время от времени в Петербург приезжал Г. Миттаг-Леффлер, ученик Вейерштрасса. Он и Чебышев побуждали Ковалевскую заняться математикой, но дело двигалось туго.

Когда у Ковалевской в 1878 году родилась дочь Софья, то она выражала свою радость по поводу того, что не совсем истощила свои силы в занятиях математикой и таким образом не нанесла ущерба ребенку.

Но Ковалевская „была рождена математиком". Суетные увлечения начинали проходить. В декабре 1879 года, когда Чебышев предложил ей сделать доклад на VI съезде русских естествоиспытателей и врачей в Петербурге, Ковалевская „с чувством радости и гордости в одну ночь" подготовила свою статью об абелевых интегралах. „А утром она прочла реферат на съезде, произвела общее впечатление, заслужила одобрение Чебышева и снова примкнула к ряду научных деятелей" (Е. Литвинова).

Вскоре после съезда Ковалевская переехала в Москву. Там она сделала попытку сдавать магистерские экзамены, но получила отказ, несмотря на поддержку ряда профессоров. „Ну, что же делать, — пишет Ковалевская брату мужа, А. О. Ковалевскому, — в виду того, что мне теперь особенно важно подготовить как можно больше математических работ, чтобы хоть этим поддержать нашу женскую репутацию, я решаюсь на довольно тяжелый для меня риск, а именно, собираюсь уехать на месяц или полтора в Берлин, а дочку мою оставить здесь на попечении Юлии Лермонтовой".

6. В 1881 году Ковалевская поехала в Берлин к Вейерштрассу. Она побывала также в Париже, где французские ученые тщетно пытались устроить ей профессуру на Высших женских курсах в Севре, близ Парижа.

В апреле 1883 года трагически погиб Владимир Онуфриевич. Предприятия Ковалевских „окончились крахом и полным разорением" и Владимир Онуфриевич покончил с собой. Софья Васильевна, находившаяся в то время в Париже, очень тяжело пережила известие о смерти мужа и заболела. Оправившись,

она поехала в Россию и добилась установления невиновности Владимира Онуфриевича в темных делах нефтяной компании, где он был директором.

В августе 1883 года в Одессе состоялся VII съезд русских естествоиспытателей и врачей. Н. Е. Жуковский, познакомившийся на съезде с Софьей Ковалевской, пишет: „О ней сохранилось у меня самое отрадное воспоминание. Живая и жизнерадостная, она с одинаковой охотой говорила и о математике, и о прогулках по морю“. Ковалевская сделала на съезде доклад на тему „О преломлении света в кристаллах“. Это была основная работа, которой она занималась в 1881—1883 годах. К этой теме Ковалевскую привело изучение работ Ламе. Впоследствии Вольтерра, занимаясь этим же вопросом, обнаружил, что решение Ковалевской, как и решение Ламе, неверно, так как оно не удовлетворяет всем условиям задачи вследствие многозначности входящих в него функций. Но работа Ковалевской все же представляет интерес, так так в ней изложена теория Вейерштрасса интегрирования линейных уравнений в частных производных второго порядка с постоянными коэффициентами, нигде им не опубликованная. Эта часть работы Софьи Ковалевской была перепечатана в собрании трудов Вейерштрасса.

В этом же году Ковалевская получила снова приглашение Миттаг-Леффлера, который уже несколько раз пытался привлечь ее к профессорской деятельности сначала в Гельсингфорсском, а теперь во вновь открывшемся Стокгольмском университете. На этот раз Ковалевская приняла приглашение.

7. В ноябре 1883 года Софья Ковалевская приехала в Стокгольм. Шведские газеты много писали по поводу этого события. Одна демократическая газета писала: „Сегодня нам предстоит сообщить не о приезде какого-нибудь пошлого принца крови, или тому подобного, но ничего не значащего лица. Нет, принцесса науки, г-жа Ковалевская почтила наш город своим посещением и будет первым приват-доцентом женщиной во всей Швеции“.

Были и статьи другого рода. Так, известный писатель Август Стриндберг, противник эмансипации женщин, старался, как шутливо писала Ковалевская, доказать, „насколько такое чудовищное явление, как женский профессор математики, вредно, бесполезно и неудобно".

Георг Брандес позже писал, что „скандинавская публика прочла, нисколько не убедившись его доводами, страстное нападение разгневанного Стриндберга на глупых околпаченных людей, которые предоставили такой женщине, как Ковалевской, профессорскую кафедру в Стокгольме".

С 1884 года, когда она стала работать в Стокгольме, начинается расцвет научной и литературной деятельности С. В. Ковалевской. Склонность к литературе проявлялась у нее еще в петербургский и московский периоды жизни, когда она принимала участие в газетной деятельности. В Стокгольме совместно со шведской писательницей А. К. Эдгрен-Леффлер, сестрой Миттаг-Леффлера, С. В. Ковалевская написала драму „Борьба за счастье", поставленную несколько раз в России. Кроме того, Ковалевской написаны „Воспоминания детства", „Нигилистка", очерк „Три дня в крестьянском университете в Швеции", „Воспоминания о Джордже Эллиоте" и другие произведения, печатавшиеся на шведском, русском и других языках.

В литературных произведениях проявляются живой и глубокий ум Ковалевской и широта ее интересов.

В Стокгольмском университете С. В. Ковалевская в течение восьми лет прочла двенадцать курсов. Курс 1884 года был посвящен теории уравнений в частных производных; затем следовали лекции об алгебраических, абелевых и эллиптических функциях по Вейерштрассу; теории движения твердого тела (в 1886/87 г.); о кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, по Пуанкаре (1887/88 г.); по приложению анализа к теории чисел и др. Лекции Ковалевской пользовались успехом. Обычно она читала два раза в неделю по два часа.

8. В Стокгольме же Ковалевской была написана работа, составившая, по словам Н. Е. Жуковского, главным образом ее ученую славу: „Задача о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки". (12) 24 декабря 1888 года Парижской академией наук С. В. Ковалевской присуждена премия Бордена, увеличенная с 3000 до 5000 франков. Работа Ковалевской была представлена под девизом: „Говори, что знаешь, делай, что должен; будь, чему быть". Можно себе представить, каков был эффект, когда оказалось, что автор работы, так высоко оцененной комиссией (в нее входили Морис Леви, Филипс, Резаль, Сарро и Дарбу), была женщина, впрочем, уже пользовавшаяся известностью.

Остановимся несколько на этой работе. Н. Е. Жуковский пишет: „Чтобы яснее выставить на вид, что было прибавлено С. В. Ковалевской в решении упомянутой трудной задачи, я напомню коротко результаты, достигнутые при исследовании этого вопроса другими учеными.

Вопрос о движении тяжелого твердого тела в случае, когда центр его тяжести находится в точке опоры, аналитически исследован Эйлером, который написал обширный трактат на эту тему; но полное решение его было дано с помощью изящного геометрического метода Пуансо, показавшего, что интеграла живых сил и площадей вполне достаточно, чтобы дать полную картину движения. Второй случай, который поддался решению, соответствовал таким обстоятельствам, при которых эллипсоид инерции относительно точки опоры есть эллипсоид вращения и на оси вращения этого эллипсоида лежит центр тяжести тела. Задача о движении такого тела была разрешена Лагранжем, который к интегралу живых сил и интегралу площадей относительно вертикальной линии, проходящей через точку опоры, прибавил еще интеграл, выражающий постоянство угловой скорости около оси вращения эллипсоида инерции, и, воспользовавшись этими тремя интегралами, выразил все искомые величины с помощью эллиптических трансцендентных. Дальнейшие работы ученых содер-

жат доказательства различных геометрических и аналитических теорем, относящихся к двум упомянутым случаям движения. Таковы работы Максвелла, Сильвестра, Мак-Куллаха, Якоби, Сомова, Дарбу и др. При этом из аналитических исследований выяснилось, что положение тела в пространстве в той и другой задаче может быть дано с помощью Якобиевых функций от линейных функций времени".

Затем наступило затишье в исследованиях, относящихся к этой задаче.

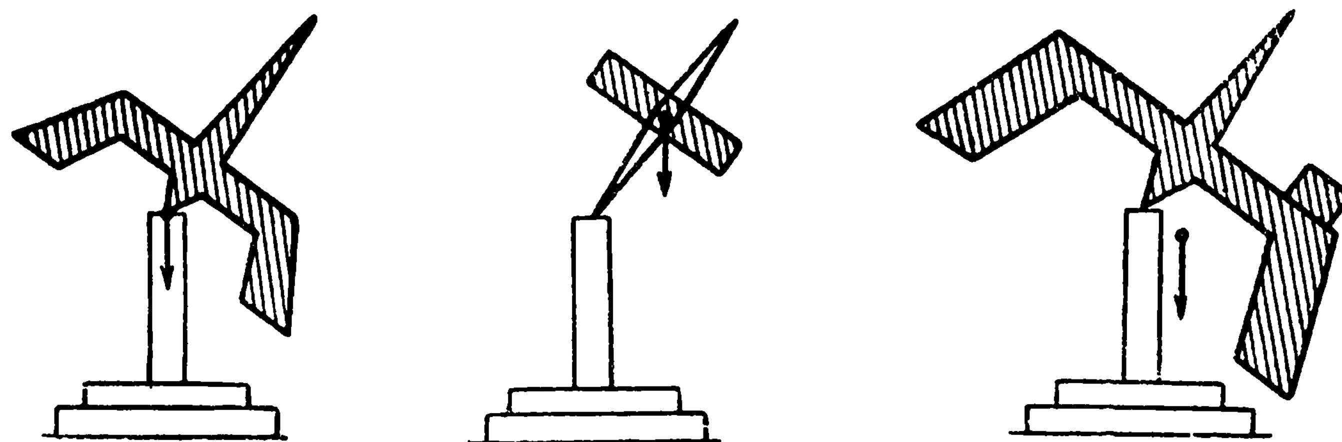
Премия Бордена, назначенная за дальнейшее усовершенствование задачи в каком-нибудь существенном пункте, несколько раз оставалась неприсужденной или выдавалась неполностью. Очевидно, нужно было подойти к задаче с какой-то новой точки зрения. Новая идея, положенная Ковалевской в основу при решении задачи, заключалась в том, чтобы рассматривать время t —независимую переменную задачи—как комплексную переменную и привлечь к решению теорию функций комплексного переменного. Дело в том, что в двух указанных выше случаях все элементы движения выражаются через эллиптические функции времени. Рассматриваемые на плоскости комплексного переменного, функции эти не имеют других особенностей, кроме полюсов, и, следовательно, являются однозначными.

Ковалевская поставила перед собой вопрос: существуют ли в общем случае движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки общие решения, однозначные и не имеющие других особенностей, кроме полюсов. Ответом на поставленный вопрос явилась

Теорема Ковалевской. Уравнения движения тяжелого твердого тела в общем случае не имеют однозначных решений, допускающих пять произвольных постоянных и не имеющих на всей плоскости переменного других особых точек, кроме полюсов. Исключение составляют случаи, указанные выше, и, кроме того, новый случай, найденный Ковалевской, когда центр тяжести тела лежит на плоскости

экватора эллипсоида инерции, построенного для неподвижной точки, который должен быть эллипсоидом вращения и должен удовлетворять условию $A = B = 2C$, где A, B и C — главные моменты инерции.

„Придя к такому заключению, Ковалевская обращается к задаче о движении твердого тела в упомянутом случае и разрешает ее вполне". Для наглядного сравнения трех случаев движения тяжелого твердого тела Н. Е. Жуковский нарисовал три следующих волчка:



„Первый волчок соответствует случаю, разрешенному Пуансо, второй представляет случай Лагранжа, а третий случай тот, который исследован С. В. Ковалевской. Характерная особенность третьего случая состоит в том, что с поворотом волчка около оси вращения изменяется момент действующей на него силы.

Весь успех исследования Ковалевской в рассматриваемой задаче заключается в прибавлении к известным интегралам живых сил и площадей еще одного нового алгебраического интеграла. Анализ ее для достижения этой цели настолько прост, что, по моему мнению, его следует включить в курсы аналитической механики".

Это и было выполнено Сусловым, Аппелем и др. Ляпунов дал теореме С. В. Ковалевской более широкую формулировку (см. приложение V).

Для найденного ею случая Ковалевская отыскала алгебраические интегралы и затем выразила элементы движения в функциях вспомогательных переменных s_1 и s_2. Решение имеет очень сложный вид, и лишь основательное знакомство Ковалевской с теорией гиперэллиптических функций позволило ей справиться полностью с задачей.

С появлением мемуара Ковалевской о вращении твердого тела возникла задача об отыскании всех случаев, когда существует четвертый алгебраический интеграл задачи. Исследования ряда ученых, основанные на теореме Пуанкаре, показали, что четвертый алгебраический интеграл существует лишь в четырех указанных случаях. Таким образом, вопрос об однозначных и алгебраических *общих* интегралах задачи о вращении твердого тела оказался исчерпанным. В сборнике „Движение твердого тела вокруг неподвижной точки", посвященном памяти С. В. Ковалевской, вышедшем в 1940 году под редакцией С. А. Чаплыгина и Н. И. Мерцалова, в статье П. Я. Полубариновой-Кочиной изложен вопрос об однозначных и алгебраических интегралах.

Возникла и другая задача — об отыскании частных интегралов заданного вида. По этому поводу после работы Ковалевской появилось много исследований. Таковы исследования Горячева, Чаплыгина, Колосова, Стеклова. Случай, найденный Гессом, был вновь открыт П. А. Некрасовым и Г. Г. Аппельротом при исследовании одного пропущенного Ковалевской движения. Исследование П. А. Некрасова показало, что общее решение здесь получается многозначным; Гессом же был найден алгебраический частный интеграл. Горлисс нашел частные интегралы для некоторых случаев несимметричного волчка.

Г. Г. Аппельрот, посвятивший всю свою долгую научную жизнь задаче о вращении твердого тела, написал в 1940 году обширный мемуар в сборнике памяти С. В. Ковалевской. Первая его работа, в которой он подробно разбирает §1 мемуара Ковалевской, была написана вскоре после ее смерти.

До конца жизни он был горячим поклонником Софьи Ковалевской и говорил, что в ее работе о вращении твердого тела виден блеск таланта.

С большим интересом математики отнеслись также к самому случаю Ковалевской. Н. Е. Жуковский дал геометрическую интерпретацию уравнений для вспомогательных переменных s_1 и s_2. Н. Б. Делоне исследовал частные случаи движения гироскопа Ковалевской и сконструировал прибор, воспроизводящий его движение. Аналогичная задача сделана Н. И. Мерцаловым. Частный случай — когда решение получается в рациональных функциях времени — исследовал Б. К. Млодзеевский. Леви-Чивита принадлежит изучение стационарных движений гироскопа Ковалевской и их устойчивости. Имеется работа Меттлера о периодических и асимптотических решениях уравнений несимметричного тяжелого волчка.

Однако до сих пор задача о вращении, которую раньше называли, по словам С. В. Ковалевский, „математической русалкой“, не является полностью решенной, т. е. мы не имеем общих методов изучения движения для любых значений параметров и любых начальных значений функций, входящих в уравнения движения. Но, каковы бы ни были результаты дальнейших исследований, имя Ковалевской навсегда останется связанным с этой задачей.

За вторую статью о вращении твердого тела С. В. получила в 1889 году премию (1500 крон) от Стокгольмской академии.

9. Софья Ковалевская стала знаменитостью. О ней знал весь культурный мир, о ней писали в газетах и журналах.

Русские математики, во главе с Чебышевым, поставили вопрос о привлечении Ковалевской к научной работе в России. Генерал А. И. Косич взялся хлопотать об этом перед правительством. Он обратился с письмом к президенту Академии Наук, великому князю Константину Константиновичу (поэту К. Р.), причем напомнил ему изречение Наполеона о том, что „всякое государство должно дорожить возвращением выдающихся людей более, нежели завоеванием богатого города“.

Ответ, переданный Косичу 11 октября 1889 года секретарем Академии К. С. Веселовским, был таков: „Софья Васильевна Ковалевская, приобревшая за границей громадную известность своими научными работами, пользуется не меньшею известностью и между нашими математиками. Блестящие успехи нашей соотечественницы за границею тем более лестны для нас, что они всецело должны быть приписаны ее высоким достоинствам, так как там национальные чувства не могли служить для усиления энтузиазма в пользу ее. Особенно лестно для нас то, что г-жа Ковалевская получила место профессора математики в Стокгольмском университете. Предоставление университетской кафедры женщине могло состояться только при особо высоком и совершенно исключительном мнении об ее способностях и знаниях, а г-жа Ковалевская вполне оправдала такое мнение своими поистине замечательными лекциями“. Но „Так как доступ на кафедры в наших университетах совсем закрыт для женщин, каковы бы ни были их способности и познания, то для г-жи Ковалевской в нашем отечестве нет места столь же почетного и хорошо оплачиваемого, как то, которое она занимает в Стокгольме. Место преподавателя математики на Высших женских курсах гораздо ниже университетской кафедры; в других же наших учебных заведениях, где женщины могут быть учителями, преподавание математики ограничивается одними элементарными частями“.

10. Таким образом, в России не было подходящего места для Софьи Ковалевской. Почти вся ее научная деятельность прошла за границей. Все ее работы напечатаны в иностранных журналах. Это относится и к последней написанной ею работе, заметке „Об одной теореме г. Брунса“.

Эти обстоятельства дали повод некоторым ученым упрекать Софью Ковалевскую в том, что она по отношению к науке была западницей. Этот упрек мне кажется неосновательным. В самом деле, что такое западничество в науке? П. А. Некрасов говорит об этом в своей речи о С. В. Кова-

левской следующее: „...и теперь еще между русскими учеными существуют такие, которые игнорируют современные успехи русской науки, не видят еще, что наука, и особенно наука математическая, в России вышла из состояния подчинения Западу и уже переходит в равноправную с ним связь. Равноправность эта выражается как в том, что некоторые отрасли науки в России ушли уже вперед западной науки, так и в ясном различении со стороны представителей русской науки того, что действительно ценно в западной науке, и того, что в западной науке представляет только мишурный блеск и подделку, вызванную усиленной конкуренцией и самолюбивым желанием во что бы то ни стало прославиться и победить противников на почве этого самолюбия“. Такого рода западницей Ковалевская не была.

Основной причиной того, что деятельность Ковалевской прошла за границей, было стечение обстоятельств, проистекавших из условий русской жизни.

Если бы Ковалевскую допустили в Петербургский университет в 1868 году, она оказалась бы под влиянием Чебышева и, вероятно, стала бы его ученицей. К Вейерштрассу она попала, уже получив специальную подготовку у его ученика Кенигсбергера. Она стала горячей сторонницей математического направления Вейерштрасса. Но логические построения Вейерштрасса не остались самодовлеющими в ее научных исследованиях. Они имели большое значение для всех ее работ, в том числе и для задачи о вращении, однако переход Ковалевской к прикладным вопросам — приложению математики к механике, сближает ее с направлениями, которые складывались в русских математических школах. После работы о вращении твердого тела, несомненно, установился бы полный научный контакт между Ковалевской и ее соотечественниками, если бы она не умерла так скоро после своего научного триумфа. Многочисленные отклики на ее работу русских ученых последовали уже после ее смерти.

В период своей жизни в России, с 1874 по 1881 г., она

вообще слишком мало занималась математикой для того, чтобы войти в круг идей русских математиков. Но впоследствии она стала интересоваться работами Чебышева, перевела его статью „О представлении предельных величин интегралов посредством интегральных вычетов“ на французский язык для напечатания в Acta mathematica, членом редакционного комитета которых она состояла. Там же она опубликовала письмо Чебышева, посланное ей 20 сентября (2 октября) 1886 года, „О суммах, составленных из коэффициентов ряда с положительными членами. Письмо, адресованное г-же Софье Ковалевской“. Во вступлении Чебышев пишет: „Я весьма обрадован честью, которую Вы мне оказали, пожелав перевести мою заметку о предельных величинах интегралов. Интерес, с которым Вы отнеслись к моим исследованиям по этому предмету, побуждает меня сообщить Вам один результат, который я только что извлек из них, относительно определения пределов“.

Изложенное показывает, что „западничество“ Ковалевской было вынужденным. Известно, что она всегда интересовалась общественной жизнью России. М. М. Ковалевский, выдающийся юрист, удаленный из Московского университета, где он читал лекции по государственному праву, и вынужденный покинуть Россию, познакомился с С. В. Ковалевской в Стокгольме. В 1890 году он посвятил ей свою работу. После ее смерти он писал: „Ушедши в науку, Софья Васильевна не потеряла связи с русской действительностью. Не состоя сама в рядах какой-либо политической партии, она тем не менее не относилась безучастно к самоотверженному служению общественным задачам“.

Отметим здесь интерес Ковалевской к общественному движению. Будучи в Париже, она познакомилась с известным эмигрантом П. Лавровым и вращалась в радикальных кругах. Она вела переписку с социал-демократом Фольмаром и революционеркой Мендельсон-Залесской. В свое время В. О. Ковалевский удивлялся ее способности быстро и основательно

разбираться в политических и экономических вопросах. Иногда Софье Васильевне казалась узкой ее математическая деятельность, и она говорила, что „теперь каждый обязан свои лучшие силы посвятить делу большинства“. В своей литературной деятельности она видела средство общения с широким кругом людей.

В Швеции Ковалевская пользовалась не только внешним успехом (ею восхищались и гордились в профессорских и литературных кругах, — называли „наш профессор Соня“), но и нашла себе искренних друзей в лице Миттаг-Леффлера и его сестры. Однако, говорит М. М. Ковалевский, который сам был изгнанником своей родины, „достаточно было нескольких встреч, чтобы убедиться, как одиноко чувствовала себя эта женщина на чужбине, как все русское было близко ее сердцу, и как она чувствовала себя отрезанной, если не от всего мира, то, по крайней мере, от России своим, только наполовину добровольным, переездом в Стокгольм“.

11. Русские ученые Чебышев П. Л., Имшенецкий В. Г., Столетов А. Г., Жуковский Н. Е., Буняковский В. Я., Давидов А. Ю., Тихонравов Н. С. и др. сочувственно относились к Ковалевской и оказывали ей поддержку, которая, однако, носила больше характер моральной поддержки, так как не в их власти было преодолеть мнение высших сфер.

После отказа президента Академии Наук в ответ на письмо А. И. Косича, в физико-математическое отделение Академии Наук поступило такое заявление, зачитанное 24 октября (5 ноября) 1889 года: „Нижеподписавшиеся имеют честь предложить к избранию членом-корреспондентом Академии, в разряд Математических наук, доктора математики, профессора Стокгольмского университета Софью Васильевну Ковалевскую. П. Чебышев, В. Имшенецкий, В. Буняковский“. 4 (16) ноября в Академии был решен принципиальный вопрос „о допущении лиц женского пола к избранию в члены-корреспонденты“. Вопрос был решен утвердительно 20 голосами против 6. А 7 (19) ноября на физико-математическом отде-

лении в члены-корреспонденты была избрана Софья Ковалевская 14 голосами против 3. Общее собрание Академии Наук 2 (14) декабря 1889 г. утвердило избрание С. В. Ковалевской.

Но недолго С. В. Ковалевская была членом-корреспондентом Российской Академии Наук. Она скончалась 29 января (10 февраля) 1891 года после непродолжительной болезни — воспаления легких, полученного ею при возвращении в Стокгольм с юга Франции, где она проводила зимние каникулы.

Ее хоронили при большом стечении публики, в том числе академиков, профессоров, студентов. М. М. Ковалевский выступил с речью, в которой сказал: „Софья Васильевна! Благодаря вашим знаниям, вашему таланту и вашему характеру, вы всегда были и будете славой вашей родины. Недаром оплакивает вас вся ученая и литературная Россия. Со всех концов обширной империи, из Гельсингфорса и Тифлиса, из Харькова и Саратова, присылают венок на вашу могилу. Вам не суждено было работать в родной стране, и Швеция приняла вас. Честь этой стране, другу науки! Особенно же честь молодому Стокгольмскому университету! Но, работая по необходимости вдали от родины, вы сохранили свою национальность, вы остались верной и преданной союзницей юной России, России мирной, справедливой и свободной, той России, которой принадлежит будущее. От ее имени прощаюсь с вами в последний раз“.

Миттаг-Леффлер, бывший тогда ректором Стокгольмского университета, сказал: „От имени Стокгольмского университета, от имени работников на поприще математических наук во всех странах, от имени всех близких и далеких друзей и учеников, — обращаюсь я к тебе с последним прощанием и благодарностью. Благодарю за глубину и ясность, с которыми ты направляла умственную жизнь юношества, за что потомство, как и современники, будут почитать твое имя. Благодарю за те сокровища дружбы, которыми ты оделяла всех близких твоему сердцу“.

Фриц Леффлер, брат Миттаг-Леффлера, написал стихотворение „На смерть С. В. Ковалевской“.

В 1896 году русские женщины на деньги, собранные комитетом Высших женских курсов, на могиле Софьи Ковалевской в Стокгольме поставили памятник, сделанный по проекту архитектора Н. В. Султанова.

После смерти С. Ковалевской А.-К. Леффлер написала книгу о ней. „В этой книге“, говорит Георг Брандес, „излагается судьба великого человека. Она вносит с собою веяние более богатой во внешних и внутренних отношениях жизни, чем та, которая течет всюду в Скандинавских странах“.

А.-К. Леффлер, говоря о С. В. Ковалевской, относит ее к числу „истинно-просвещенных и свободомыслящих русских“, которые „превосходят всех других европейцев по многосторонности, отсутствию предрассудков и широте взглядов... Они стоят в ряду передовых людей всей остальной Европы, отличаются необыкновенной способностью схватывать налету новые идеи, как только они появляются на горизонте, и с почти неслыханною живостью мысли соединяют такой энтузиазм, такую веру в свои идеалы, каких мы не встречаем ни у одной из других европейских наций“.

Брандес приводит описание внешности Софьи Ковалевской. „Кто лишь мимолетно видел эту замечательную русскую женщину, которая волею судеб... была приглашена в Скандинавию, сохранил воспоминание об изящной даме небольшого роста, с блестящими проницательными глазами и необычайно живыми и почти красивыми чертами лица,... с глубокою морщиною между глазами, выражавшею умственное напряжение... Вся она казалась воплощением подвижности, ее разговор отличался тревожным, почти слишком напряженным оживлением, а отыскивая подходящее выражение для изъяснения своих мыслей, она могла в полчаса забегать в область трех-четырех различных языков.“

12. В общей оценке способностей С. В. Ковалевской можно согласиться с мнением П. А. Некрасова, который писал:

„С. В. Ковалевская бесспорно равна весьма талантливым из математиков-мужчин нашего времени, так как она глубоко проникла в существующие методы науки, искуснейшим образом пользовалась ими, распространяла и развивала их, делая совершенно новые, блестящие открытия и легко справляясь с громаднейшими затруднениями“.

Для того чтобы уяснить, какое место занимает С. В. Ковалевская в истории науки, нужно сравнивать ее не только с мужчинами, но и с женщинами-учеными в области точных наук. Сама Ковалевская так говорила о своем жизненном назначении:

„Я чувствую, что предназначена служить истине — науке и прокладывать новый путь женщинам, потому что это значит служить справедливости“.

Поэтому напомним здесь некоторые женские имена.

В V веке нашей эры славилась своею ученостью Гипатия, дочь Теона Александрийского, читавшая лекции по философии и математике. Ею были написаны комментарии к трудам Аполлония и Диофанта по математике, не дошедшие до нашего времени. О ней написано несколько романов (Кингслея, Маутнера, Мейера), вызванных исключительными особенностями ее биографии: она была язычницей и была (в 415 г.) растерзана толпой христиан, подстрекаемых христианским духовенством.

Маркиза Эмилия Дю-Шатле (1706—1749) перевела „Начала“ Ньютона с латинского языка на французский и снабдила их своими комментариями, проредактированными Клеро.

В 1748 году итальянка Мария Гаетана Аньези (1718—1799) написала „Курс анализа для употребления итальянского юношества“, переведенный в 1775 году на французский язык. Одна из кривых третьего порядка носит название „версьера Аньезии“.

Монтукла в своей истории математики пишет: „Нельзя видеть без удивления особу пола, так мало подходящего, чтобы бороться с шипами науки, проникшую столь глубоко

во все части анализа как обыкновенного, так и трансцендентного". Аньези рано покинула ученый мир, удалившись в монастырь.

Гипатия, Дю-Шатле, Аньези проявили способности к усвоению высших, для их эпох, математических теорий и к передаче своих познаний. Более глубокий творческий талант был проявлен Софьей Жермен (1776—1831), которая получила в 1808 году наполеоновскую премию Парижской академии наук за исследования по теории упругости (содержавшаяся в них ошибка была исправлена Лагранжем; см. Кирхгофф, журнал Крелля, т. 40).

Софья Ковалевская превосходила своих предшественниц талантом и значительностью полученных результатов и была первой в мире женщиной-профессором и членом-корреспондентом.

Выдающейся женщиной-математиком на Высших женских курсах была профессор Надежда Николаевна Гернет (1876—1942), получившая в начале нашего века ученую степень доктора философии в Геттингене за работу по вариационному исчислению и выпустившая книгу „Об основной простейшей задаче вариационного исчисления". Ей принадлежит изящное исследование „О радиусе круга сходимости ряда Лагранжа".

Крупным математиком была Екатерина Алексеевна Нарышкина (1895 — 1940), выросшая и работавшая в Советской России. Ее работы отличаются большой силой и глубиной математического анализа. Имя ее известно лишь в узком кругу математиков, так как ее работы относятся к специальной и трудной области теоретической сейсмологии — науки об упругих колебаниях в твердом теле. Основные результаты ее работ изложены С. Л. Соболевым в русском издании книги Франка и Мизеса „Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики", ч. 2, гл. XII.

Среди женских имен в физике мировой известностью пользуется имя Марии Склодовской-Кюри (1867—1934), получившей дважды нобелевскую премию.

В настоящее время у нас в Советском Союзе созданы все условия для того, чтобы женщина наравне с мужчиной занималась наукой, если это соответствует ее природным склонностям. Многие женщины трудятся в области наук, в том числе математических, и теперь у нас уже никого не удивляет, что они получают высокие награды и премии за свои работы.

После Софьи Ковалевской были и, несомненно, еще будут женщины с неменьшим научным талантом, чем у нее, вносящие не менее ценные вклады в науку, чем она. Однако вряд ли многие из них будут пользоваться такой широкой известностью, как наша знаменитая соотечественница: она с честью выполнила свое предназначение, и ей по заслугам принадлежит исключительное место в истории женского движения; ее большой популярности содействовал тот интерес, который вызывали в других ее многосторонняя живая натура и ее художественный талант.

Научная известность обеспечена Ковалевской благодаря удаче в выборе задач, которыми она занималась (две наиболее важные ее работы относятся к основным вопросам математики и механики), и благодаря простоте ее результатов, позволившей включить их в основные курсы математики и механики. Работа ее по вращению твердого тела составляет блестящую страницу в истории этого вопроса и дала толчок к большому количеству дальнейших исследований.

Все это позволяет с уверенностью сказать, что имя С. В. Ковалевской навсегда останется в истории науки, увенчанное заслуженной славой.



ПИСЬМА ВЕЙЕРШТРАССА ФУКСУ О СОФЬЕ КОВАЛЕВСКОЙ*

I

Берлин, Потсдамская ул., 40
27 июня 1874

Глубокоуважаемый друг и коллега!

Прежде всего я должен выразить Вам глубочайшую благодарность за готовность, с которой Вы немедленно по прибытии в Геттинген взяли на себя труд сообщить мне желательные сведения об условиях соискания степени для моей ученицы г-жи Ковалевской. То, что Вы сообщили мне в письме от 18 апреля с. г., было полностью подтверждено профессором Вебером, с которым, к моей большой радости, снова пришлось говорить в Берлине. При этом я еще получил от него интересное сообщение: когда, в связи с последними юбилейными торжествами Геттингенского университета, был поднят вопрос о предстоящих выдачах дипломов, Гаусс выразил сожаление, что нет в живых Софьи Жермен, которая доказала миру, что женщина также способна дать нечто дельное в наиболее точной и отвлеченной из всех наук и поэтому имеет право на получение диплома.

После этого я без опасений ободрил г-жу Ковалевскую на соискание диплома in absentia ** при своем факультете и советовал для этого закончить несколько работ, которыми она занималась в последние годы, частью по собственной инициативе, частью по моему побуждению. По моему со-

* Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung. Leipzig. 1909. Bd 18, S. 89—99. Acta Mathematica. 1923. Bd 39. S. 246—256.
** Заочно.

вету она подает факультету три сочинения, чтобы доказать, что она достаточно хорошо изучила различные области математики, чтобы, примыкая к существующим работам, производить самостоятельные и полезные для науки исследования.

Одно из этих сочинений занимается вопросом, можно ли и как далеко можно распространить теоремы об интегрировании системы обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов, которые сначала я установил в моем сочинении об аналитических факториалах (журнал Крелля, 51, стр. 43, 44) и которые вскоре затем были доказаны господами Брио и Буке для того случая, когда для определения функций многих переменных задано требуемое число дифференциальных уравнений в частных производных. Этот вопрос безусловно должен был быть один раз основательно разобран; я сам, откровенно говоря, боялся пуститься в эти исследования, и меня тем более радует, что она самым основательным образом занялась работой, о которой идет речь и которая в ее последней редакции имеет лишь ограниченное значение.

Трудности, которые прежде всего представились, например, неожиданное и достойное размышления замечание, что уже такое простое дифференциальное уравнение, как много раз рассмотренное

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$$

если положить, что φ при $t = 0$ должна перейти в заданную функцию $\varphi_0(x)$, представимую сходящимся степенным рядом, вообще говоря, т. е. если $\varphi_0(x)$ не удовлетворяет совсем особенным условиям, приводит к *всюду* расходящемуся разложению $\varphi(x, t)$ по степеням t, — остроумием исследовательницы преодолены простейшим и самым удовлетворительным образом. Я убежден, что эта работа в Вас также возбудит интерес.

Во втором сочинении вновь предприняты исследования Лапласа о форме кольца Сатурна и продолжены дальше. Результаты Л. оказались годными только в качестве первого приближения; кольцо, которое должно, как установил Л., удовлетворять условиям задачи, не может быть получено вращением эллипса вокруг прямой, параллельной его малой оси; вместо эллипса нужно рассматривать фигуру, которая с двух сторон по-разному искривлена и, при сделанных Лапласом предположениях, если отвлечься от сложности вычислений, может быть определена с любой степенью точности. Для второго приближения вычисления произведены полностью.

В третьей работе моя ученица занимается поставленной мною задачей. Как Вы, уважаемый коллега, знаете, несколько лет тому назад я сделал письменно сообщение господину Кенигсбергеру об условиях, которым должна удовлетворять алгебраическая функция $\varphi(x)$, если среди интегралов

$$F(x, \varphi(x))\,dx$$

где F обозначает рациональную функцию x и $\varphi(x)$, должны находиться такие, которые допускают преобразование к эллиптическому интегралу (К. напоминает об этом сообщении в одной из своих работ о преобразовании абелевых функций). Более полно высказанное, это предложение гласит так.

Пусть

$$\psi_1(x), \ldots, \psi_\rho(x)$$

есть полная система абелевых интегралов первого рода, производные которых выражаются рационально через x и $\varphi(x)$. Тогда, как известно, имеется бесконечно много основных систем периодов этих интегралов.

$$\begin{matrix} 2\omega_{11}, & 2\omega_{12}, & \ldots, & 2\omega_{1\rho}, & 2\omega'_{11}, & \ldots, & 2\omega'_{1\rho} \\ 2\omega_{21}, & 2\omega_{22}, & \ldots, & 2\omega_{2\rho}, & 2\omega'_{21}, & \ldots, & 2\omega'_{2\rho} \\ 2\omega_{\rho1}, & 2\omega_{\rho2}, & \ldots, & 2\omega_{\rho\rho}, & 2\omega'_{\rho1}, & \ldots, & 2\omega'_{\rho\rho} \end{matrix}$$

для которых выполняются уравнения

$$\sum_{\gamma=1}^{\rho} \left(\omega_{\alpha\gamma}\omega'_{\beta\gamma} - \omega_{\beta\gamma}\omega'_{\alpha\gamma}\right) = 0$$

Если (считая $\rho > 1$) среди интегралов $\int F(x, \varphi(x))\,dx$ должен быть такой, который преобразуется в эллиптический, то имеется также интеграл вида

$$c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x) + \cdots + c_\rho\psi_\rho(x)$$

а для того чтобы последний существовал, необходимо и достаточно, чтобы среди указанных систем периодов находилась такая, для которой из полученных из нее величин, которые я обозначаю через $\tau_{\alpha\beta}$

$$\tau_{12} = \frac{\mu}{\nu}, \qquad \tau_{13} = \cdots = \tau_{1\rho} = 0$$

где μ, ν — целые положительные числа (без общего делителя).

Если с помощью этих $\tau_{\alpha\beta}$ образуем функцию

$$\vartheta(v_1, \cdots, v_\rho | \tau_{\rho\beta})$$

то тотчас увидим, что среди полученных из них с помощью преобразования ν-ой степени ϑ-функций есть имеющая свойство разбиваться на произведение ϑ-функции $(\rho - 1)$ аргумента и эллиптической. Благодаря этому оказывается возможным удовлетворить алгебраическим соотношениям, имеющим место между коэффициентами, функции $\varphi(x)$.

К[енигсбергер] в другом месте рассмотрел случай, когда $\rho = 2$ и $\nu = 2$. Я хотел, чтобы это же было проделано для $\rho = 3$, $\nu = 2$, и моя ученица, к моему полному удовольствию, произвела эту работу. Хотя для этого понадобилось меньше творческих способностей, но, как Вы можете себе представить, понадобилось основательное знакомство с теорией абелевых функций, которою госпожа Ковалевская овладела в совершенстве.

После всего сказанного Вы, я думаю, сможете решить, считаете ли Вы возможным отстаивать перед Вашим факультетом ходатайство моей ученицы, в связи с требованиями, поставленными факультетом для лиц, желающих получить диплом in absentia. Я лично без всяких колебаний допустил бы каждую из названных работ в качестве диссертации на степень доктора. Но ввиду того, что это первый случай, когда женщина желает получить степень за математические работы, то факультет не только имеет все основания поставить строгие требования, но это необходимо в интересах как самой аспирантки, так и моих. Поэтому я убедительно прошу при решении вопроса не принимать во внимание, что я также заинтересован в нем.

Что же вообще касается уровня математического образования г-жи Ковалевской, то я могу с уверенностью сказать, что у меня было очень мало учеников, которые могли бы сравниться с ней в том, что касается ее способностей, суждений, прилежания и любви к науке.

Я готов дать все гарантии, которые могут быть потребованы. Я особенно подчеркиваю, что она никогда не имела никаких связей с русскими студентками, которые поступали не очень похвально в Цюрихе и других местах.

Кроме нее, на соискание степени выступает и химичка, г-жа Лермонтова, всегда бывшая с нею.

По сообщению Гофмана (который будет о ней писать Велеру), последняя подала превосходную химическую работу.

В заключение я прошу Вас, дорогой коллега, по возможности в скором времени уведомить меня о последнем сроке подачи работ, после того как Вы убедитесь, что последние вообще не будут отклонены.

Они в основном готовы, но требуют последней отделки, так как немецкий язык все же сильно затрудняет автора. Я думаю, что они могут быть сданы к 15-му июля.

Прошу Вас также любезно сообщить мне о сумме, уплачиваемой при соискании степени, и вообще, что еще надо предпринять. Например, целосообразно ли будет написать с моей стороны и декану факультета, которому для предварительной ориентации Вы можете передать это письмо.

Все остальное, что я мог бы еще сообщить Вам, я сберегу до следующего письма и заключаю настоящее чрезмерно разросшееся послание искренним пожеланием, чтобы Геттинген в скором времени стал для Вас любимой родиной и чтобы Вы во всех отношениях были удовлетворены своей деятельностью в университете, с которым в отношении издавна приобретенной математической славы не может сравняться ни один из других университетов.

С дружеским приветом

Ваш Вейерштрасс

II

Берлин, 40. Потсдамская ул.

3 июля 1874

Уважаемый друг!

Прежде всего примите глубокую благодарность за готовность, с которой Вы исполнили просьбу, с которой я позволил себе обратиться к Вам в моем письме от 27 прошлого месяца.

То, что Вы сообщили мне в Вашем письме от 30 июня, меня до некоторой степени удивило, так как я ожидал, что, быть может, пол моей ученицы, но уже никак не то обстоятельство, что она не имеет должности (и не стремится получить таковую хотя бы в учреждаемой в Петербурге Академии для молодых женщин), препятствует ее допуску на соискание степени in absentia. Мне известно, что еще в недавнем прошлом *иностранцы* допускались в Геттингене на соискание степени in absentia, не имея какой-либо должности.

Мой коллега В. Вебер, с которым я подробно обсуждал этот вопрос, ничего не говорил мне об этом условии. Между тем это является вопросом, который будет решен комиссией факультета.

Я бы не советовал г-же Ковалевской подвергаться устному испытанию в Геттингене не потому, что я не доверяю ее знаниям, — повторяю, что она, напротив, обладает в математике и в различных обла-

стях физики такими познаниями, как редкий кандидат, — но по совершенно другим причинам. До настоящего времени она вела очень уединенную жизнь, посвященную только учебным занятиям. Здесь, в Берлине, она виделась только со мной (тогда как живущая вместе с ней подруга, Лермонтова, работала в лаборатории Гофмана и несколько больше приходила в общение с людьми). Вследствие этого она очень застенчива и не решается свободно говорить с незнакомыми. К этому еще надо добавить, что при ее удивительной умственной живости ее мысли всегда несутся быстрее, чем она может их выразить устно на чуждом ей немецком языке, на котором она очень хорошо выражается письменно. Мне нечего говорить Вам, что кандидат может быть очень хорошо подготовлен и все же не ответить на некоторые вопросы, касающиеся частностей. Молодой человек, который, как правило, уже выдержал несколько испытаний, обычно справляется с ними — хотя нередки примеры противоположных результатов. Что касается моей ученицы, то, если бы она с самого начала не смогла ответить на какой-нибудь вопрос,— что вполне возможно при экзаминаторах, не знающих хода ее учебных занятий,— то уже взволнованная необычностью положения, она была бы настолько смущена, что результат испытания вряд ли соответствовал бы ее действительным знаниям. Я не хочу подвергать ее этой опасности, тем более, что с ее стороны не имеется никаких внешних побуждений к соисканию степени. Тем не менее я настоятельно желаю, чтобы ей дали эту возможность. Стремление изучать математику, столь необычное у молодой женщины, живущей в блестящих условиях, и с полным сознанием того, чего будет ей стоить это решение, естественно, сначала вызвало противодействие со стороны ее родных. В связи с этим я сообщаю Вам, что ее отец — русский генерал-лейтенант и помещик К о р в и н-К р у к о в с к и й, ее прадед со стороны матери был известный русский астроном и математик Ш у б е р т, ее дед, носивший ту же фамилию,— генерал и геодезист. Таким образом, математический талант наследственен в этой семье. Поэтому именно теперь, когда после 5-летней студенческой или цыганской (как она сама ее называет) жизни, в которой для нее стал слишком чувствителен недостаток обычного домашнего комфорта, она намерена возвратиться на родину и к семейной жизни, для нее очень важно получить обязательный для всякого документ, доказывающий, что не ради каприза, а из-за действительного стремления к науке она, отказываясь от всего, что привлекает молодую женщину (ей теперь 23 года), осуществила свое решение с силой воли, находящейся в едва объяснимом противоречии с чрезвычайной женственностью ее натуры. Я счел долгом сообщить Вам все это, хотя Вы уже кое-что знаете от нашего друга Кенигсбергера, чтобы подчеркнуть, что в данном случае дело идет о лич-

ности, относительно которой я уверен, что ей предстоит большая будущность, и дипломирование которой никогда не станет бесчестьем для Геттингенского университета. Вы знаете, что я противник допуска женщин к университетским занятиям (или скорее к их обучению в наших университетах) и не склонен облегчать экзаменующимся их испытания. Следовательно, Вы можете быть уверены, что в данном случае имеются веские причины, заставляющие меня выступать за соискание степени in absentia со стороны женщины.

Если же это, действительно, недопустимо по Вашим статутам, то г-жа Ковалевская едва ли повторит свою попытку при другом университете. Она мне определенно заявила, что она желает получить степень доктора только от университета, признанного чрезвычайно компетентным in rebus mathematicis *. Я посоветую ей тогда закончить ту или другую работу, с планом которых теперь она носится, а готовые работы поместить в наш журнал. Тогда, я думаю, недолго придется искать университет, который даст г-же Ковалевской степень доктора honoris causa **,— отличие, которого не заслужили бы работы, предложенные вашему факультету, как это явствует из одного места Вашего письма.

В заключение я отмечу, что г-жа Ковалевская могла бы выслать две первые указанные мною работы к 15-му этого месяца, а третью — на несколько дней позже.

Если решение факультетской комиссии будет благоприятным, то Вы, вероятно, будете так добры сообщить мне, в какой форме должно быть подано заявление.

С дружеским приветом

преданный Вам Вейерштрасс

III

Берлин. 19 июля 1874

Уважаемый друг!

Одновременно с настоящим письмом Вы получите пакет, адресованный В. Веберу и содержащий две диссертации г-жи Ковалевской, curriculum vitae+, латинское послание факультету и немецкое заявле-

* В математических предметах.

** Почета ради.

+ Жизнеописание.

ние декану. Я не был уверен, что Вебер еще в Геттингене. Если он там, что мне очень желательно, то прошу Вас немедленно послать ему пакет. Письмо к нему от г-жи Ковалевской послано непосредственно ему. Если же он уехал, то будьте добры распечатать пакет и снабдить его адресом декану, которому Вы затем устно скажете все необходимое.

Вы видите, что мы в точности следовали тому, что Вы нам предложили в двух Ваших последних письмах. Хотя я не обращался к Лотце, но получил от него очень предупредительное письмо, содержание которого вполне согласуется с Вашим. Разумеется, что я ему сейчас же ответил и искренно поблагодарил за его дружеское отношение.

Ваше последнее письмо несколько задержало отсылку диссертации, так как из него, повидимому, вытекало, что одновременно с диссертацией „К теории дифференциальных уравнений в частных производных" следует отослать и диссертацию, касающуюся формы колец Сатурна. В последней опущены обширные вычисления, подробное изложение которых излишне для данной цели, и она редактирована таким образом, что Вебер легко может вынести свое решение, которое поможет продвинуть все дело.

Другая диссертация, вероятно, будет представлена Вам в ближайшее время*. Так как Вы лучше других знаете, какое значение для исследования функций одной переменной, определяемых обыкновенным дифференциальным уравнением, имеет теорема, гласящая, что обыкновенный степенной ряд, *формально* удовлетворяющий дифференциальному уравнению, безусловно сходится в определенной области, то я уверен, что Вы сочтете заслуживающим внимания успехом, если в данной диссертации установлено, в какой мере эта теорема действительна и для дифференциальных уравнений в частных производных. Я позволю себе особенно обратить Ваше внимание на то, что применимость этой теоремы — что меня очень поразило — зависит от определенной *нормальной* формы дифференциального уравнения или — если требуется определить несколько функций — от формы системы дифференциальных уравнений, притом от формы, которая всегда может быть достигнута простым (линейным) преобразованием независимых переменных. Одновременно это доказательство удовлетворительно разъясняет некоторые парадоксы, которые представляет теория дифференциальных уравнений в частных

* Этого, повидимому, не случилось. В письме от 18 августа Вейерштрасс пишет Фуксу: „Я особенно обязан Вам тем, что в своем последнем письме Вы сообщили мне, что все указанные диссертации г-жи Ковалевской переданы на обсуждение одного Шеринга". (Примечание Шлезингера.)

производных в отношении числа произвольных функций в их общем интеграле.

Г-жа Ковалевская поручила мне выразить Вам искреннюю благодарность за любезность, с которой Вы приняли участие в ее деле. Еще одно слово о curriculum vitae. Г-жа Ковалевская, как и г-жа Лермонтова, изучила латинский язык, так что им доступна латинская математическая литература. Но у нее нет опыта в письме, и при редактировании своего сочинения ей пришлось обратиться к помощи филолога. Это Вы можете отметить в случае необходимости. Я в этом не виноват.

С дружеским приветом

Вейерштрасс

IV

Берлин. 21 июля 1874

Уважаемый коллега!

Я стал для Вас настоящим мучителем, но что же мне делать? Сейчас ко мне явилась моя ученица, очень взволнованная и обвиняющая себя в том, что она не уложила одного листа своей работы о кольцах Сатурна (с которыми ей пришлось сильно бороться*) и не знает, что ей делать. Поэтому мне приходится сделать друга Фукса своим посредником и позаботиться о приложении этого листа к другим.

Так как мне снова приходится обратиться к Вам с письмом, то я позволю себе коснуться еще двух пунктов. Если комиссия решит отказать ходатайству г-жи Ковалевской в том виде, как оно изложено, то она очень хотела бы, чтобы отказ был мотивирован не ее полом, а требованием устного испытания. Быть может после того, как работа будет принята, ей удастся преодолеть свою застенчивость и в начале будущего семестра приступить к испытанию. Я уже раньше писал об этом Лотце, но очень хотел бы, чтобы дело разрешилось ранее предложенным образом. Я боюсь также, что молодая, очень некрепкая женщина, которая, естественно, гораздо больше волнуется на экзамене, чем студент, уже закаленный несколькими испытаниями, и на которой заметно отразилась напряженная работа последних месяцев, сильно утомится, если ей еще несколько месяцев придется находиться в состоянии постоянного напряжения. Если же строгий экзамен (examen rigorosum) будет опущен, то будьте добры справиться у декана о сумме оплаты и о сроке ее высылки.

---

* Игра слов: Ring — кольцо, ringen — бороться (*прим. переводчицы*).

Относительно работы „К теории дифференциальных уравнений в частных производных“ мне хотелось бы отметить, что первоначально предполагалось присоединить к ней дополнение „Применение и выводы“. Но его проработка требует большого труда, и поэтому этот раздел совершенно выключен. Однако он содержал кое-что интересное. Например, если однородное тело ограничено *одной* регулярной (аналитической) поверхностью S, параллельно которой построены две поверхности S_1, S_2, одна внутри, а другая снаружи тела, причем в пространстве между S_1 и S_2 нет центра кривизны S, то *внешний* потенциал тела всегда можно продолжить до поверхности S_1, а *внутренний* — до поверхности S_2 (как однозначную аналитическую функцию координат)*. Отсюда между прочим вытекает: если поверхность S мало отклоняется от шаровой поверхности — в смысле, требующем еще более точного определения — то ряд, в который может быть разложен внутренний потенциал при условии, что притягиваемая точка находится вблизи центра тяжести тела, действителен и с внешней стороны S. Точно таким же образом разложение внешнего потенциала, получаемое при условии, что притягиваемая точка далеко отстоит от центра тяжести, действительно и для точек с внутренней стороны S. Благодаря этому можно точно доказать и знаменитую теорему Лежандра о форме вращающейся однородной жидкости, если она мало отличается от формы шара, т. е. что ее поверхность будет необходимо представлять эллипсоид вращения. Такого доказательства не было дано Лежандром, по крайней мере с точки зрения современных требований. Вы должны согласиться, что студент, совершенно самостоятельно занимающийся подобными исследованиями, представляет собой необычное явление.

Вейерштрасс

---

* Статья С. В. Ковалевской „Об одной теореме г. Брунса“ относится к такого рода вопросам *(прим. ред.)*.



ОСНОВНЫЕ ДАТЫ ЖИЗНИ И ДЕЯТЕЛЬНОСТИ С. В. КОВАЛЕВСКОЙ

Родилась 3 (15) января 1850 года, скончалась 29 января (10 февраля 1891 г.

1868 г., 15 (27) сентября — свадьба Софьи Васильевны Корвин-Круковской и Владимира Онуфриевича Ковалевского и отъезд в Петербург для занятий наукой.

1869 г., апрель — отъезд в Гейдельберг.

1870 г., октябрь — переезд в Берлин и начало занятий с Вейерштрассом.

1874 г., июль — присуждение Софье Ковалевской степени доктора философии Геттингенским университетом.

1878 г., 5 (17) октября — рождение дочери, Софьи Владимировны Ковалевской.

1879 г., 28 декабря (9 января) — доклад С. В. Ковалевской на VI съезде русских естествоиспытателей и врачей в Петербурге „О приведении абелевских интегралов 3-го ранга к эллиптическим".

1881 г., 17 (29) марта—избрание С. В. Ковалевской в члены Московского математического общества.

1883 г., 15 (27) апреля — смерть Владимира Онуфриевича Ковалевского.

1883 г., 22 августа (4 сентября) — доклад С. В. Ковалевской на VII съезде русских естествоиспытателей и врачей „О преломлении света в кристаллах".

1883 г., декабрь — приезд С. В. Ковалевской в Стокгольм и начало ее работы в качестве доцента Стокгольмского университета.

1884 г. — назначение С. В. Ковалевской ординарным профессором Стокгольмского университета.

1888 г., 12 (24) декабря — присуждение Парижской академией наук премии Бордена за работу С. В. Ковалевской о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки.

1889 г., 7 (19) ноября—избрание С. В. Ковалевской членом-корреспондентом Российской Академии Наук на физико-математическом отделении Академии, утвержденное общим собранием Академии Наук 2 (14) декабря.

1889 г. — присуждение С. В. Ковалевской премии Стокгольмской академии наук за второй мемуар по изучению вращения твердого тела: „Об одном свойстве системы...“

ЛИТЕРАТУРНЫЕ РАБОТЫ С. В. КОВАЛЕВСКОЙ [1]

1. С. К — на (С. Ковалевская). — Театр и музыка, рецензии. Новое время, 1876, 17.XI, 14.XII, 19.XII; 1877, 2. IV.
2. С. К. (С. Ковалевская). — Научное обозрение. Новое время, 1876, 10.XI, 1877, 10.III, 5.V, 21.VII.
3. Kovalevsky S. V. — Der Privatdozent, 1877 (указано в The New Intern. Encycl., v. XIII, NY, 1935, p. 358).
4. Ковалевская С. В. Воспоминания о Джордже Эллиоте. Русская мысль, 1886, № 6 (июнь).
5. Kowalevsky S. Leffler A.-C.—Kampen för Lyckan, Stockholm, 1887.
6. Kowalewsky S.—Vae Victis. Шв. журн. Norna (указано в Nature: 1887, в Ann. di Mat., 1889).
7. Софья Нирон. — В больнице La Charité. Русские ведомости, 1888, № 297, 28 окт. В больнице La Salpetrière. Русские ведомости, 1888, № 301, 1 ноября.
8. Kovalevsky, Sonja.—Ur ryska lifvet. Systrarna Rajevski. Stockholm, 1889, 277 S.
9. Kowalevsky S. — Vae victis! Jul almanack 1889.
10. Ковалевская С. В. — Три дня в крестьянском университете в Швеции. Северный вестник, 1890.
11. Ковалевская С. В. — Воспоминания детства. Вестник Европы, 1890, № 7, № 8.
12. Ковалевская С. — „Знакомые" — письмо 29. V 1890, Русская старина, 1891, № 9, с. 640—641.
13. Rajevski Tanja (С. Ковалевская). — Ett barndomsminue frän polska upperesningen, Se: Tidskrift, Nordisk 1891 (указано в Svensk bok-katalog).
14. Rajevski Tanja (С. Ковалевская). — Familjen Vorontsof, Se: Tidskrift, Nordisk 1891 (указано в Svensk bok-katalog).

[1] Для этих списков использована библиография, приведенная С. Я. Штрайхом в книге [27]; она дополнена мною (*прим. редактора*).

15. Ковалевская С. В. — Посмертное стихотворение. Вестник Европы, 1892, № 2.
16. Ковалевская С. В. и Леффлер А.-К.— Борьба за счастье, драма. Перевод М. Лучицкой. Киев, 1892.
17. Kovalevsky Sonja. — Vera Vorontzoff. Berättelse ur ryska lifvet. 2a uppl. tillökad med on Efterskörd ur Sonja Kovalevskys pappers. Stockholm, Alb. Bonnier 1893, 335 S, 1 portr.: a uppl. 1892, (указано в Svensk bok-katalog).
18. Ковалевская С. В. — Литературные сочинения. СПб., 1893, 320 с.
19. Kovalevsky Sonja. — Efterskörd ur Sonja Kovalevskys papper, Stockholm Alb. Bonnier 1893, 79 S.
20. Kovalevsky S. — Souvenirs d'enfance. 1895 (Указано у Мечникова [51]).
21. Kowalewsky Sonja.— 1 Teil. Kindheitserinnerungen von ihr selbst erzählt. Deutsch v. M. Kurella. 1896, 136 S. (Bibl. der Gesamtlit. des In und Auslands).
22. Kowalewsky Sonja.— Die Nihilstin. Roman, aus dem Russ. übers. von Louise Tlachs—Fokschaneanu. Wien, 1896.
23. Kowalewsky Sonja.—Jugenderinnerungen. Aus dem Russ. übers. von Louise Tlachs—Fokschaneanu. Berlin, 1897, VIII, 205 S.
24. Ковалевская С. В.— Нигилистка, роман. Харьков, 1928. Из-во Пролетарий, 157 стр.
25 Ковалевская С. В.— М. Е. Салтыков (Щедрин). Литературное наследство. М., 1934, вып. 13—14, с. 545—552.
26. Ковалевская С. В.— Воспоминания детства и письма нигилистки. Ред. и статья Штрайха С. Я. М., 1935.
27. Ковалевская С. В.— Воспоминания детства и автобиографические очерки. Под редакцией С. Я. Штрайха. АН СССР, М.—Л., 1945, 225 с.
28. Чебышев П. Л.— О представлении предельных величин интегралов посредством интегральных вычетов. Перевод с русского на франц. язык С. В. Ковалевской. Acta mathematica 1887, т. 9, с. 35—36. Собр. соч. П. Л.Чебышева, 1899, т.1, стр. 733—735; 1948, т. III.
29. Чебышев П. Л.— О суммах, составленных из коэффициентов рядов с положительными членами. Письмо к С. В. Ковалевской от 20 сент. 1886. Перевод с русского на франц. С. В. Ковалевской. Acta mathematica, 1887, т. 9, стр. 182—184. Собр. соч. П. Л. Чебышева, 1907, т. II, стр. 421—440; 1948, т. III, стр. 226—228.



ЛИТЕРАТУРА о С. В. КОВАЛЕВСКОЙ

1. Андреевский С.— С. В. Ковалевская. Новости, первое издание, 1891, № 102. См. также № 101 и второе издание № 98 и № 99.
2. Анучин Д. Н.— Памяти М. М. Ковалевского. (Из журн. Этнографич. обозрение, кн. CIX — CX, 1916.) М., 1916, 16 стр. (о С. В. Ковалевской стр. 7).
3. Ариян П. Н.— Первый женский календарь. Год второй, на 1900 г. (С. В. Ковалевская, стр. 304—317). Спб., 1900.
4. Архив Академии Наук СССР.— Обозрение архивных материалов. Под общей редакцией Г. А. Князева. Л., Из-во АН СССР, 1933 (о С. В. Ковалевской стр. 119, 183).
5. Богданович Т. А.— Любовь людей шестидесятых годов. М., 1929 (о С. Ковалевской стр. 428 и 431).
6. Борисяк А. А.— Вл. Ковалевский и его наследие. Природа, 1942, № 7—8, стр. 124.
7. Борисяк А. А.— В. О. Ковалевский, его жизнь и научные труды. Л., 1928, 135 стр.
8. Борьба за науку в царской России, ред. С. Я. Штрайха. М., 1931 (неизд. письма В. О. Ковалевского).
9. Брандес Георг. — Собрание сочинений, т. 2. Перевод М. Лучицкой. Спб., 1896 (о С. Ковалевской стр. 333—346 и 356—368).
10. Васильев А. В.— С. В. Ковалевская. Речь, 1916, 29 января.
11. Васильев А. В. — Роль проф. Вейерштрасса в современном развитии математики. Казань, 1885, 18 стр. (о С. Ковалевской, стр. 12 и 18).
12. Венгеров С. А.— Источники словаря русских писателей, 1914, т. III, стр. 112 (библиография).
13. Витковский В. В.— Пережитое. Л., 1928, вып. 2 (о С. Ковалевской стр. 122—126).

14. Волынский А.— С. В. Ковалевская. Северный вестник, литературные заметки. 1890, № 10, стр. 156—160; 1891, № 3, стр. 147—150.
15. Всемирная иллюстрация. — Софья Ковалевская, профессор математики в Стокгольмском университете. 1884, № 804, стр. 470.
16. Гнеденко Б. В.— Очерки по истории математики в России. ГТТИ, М.— Л., 1946 (С. В. Ковалевская, стр. 143—153).
17. Давиташвили Л. Ш.— В. О. Ковалевский. АН СССР. М.— Л., 1946, 419 стр.
18. Домбровская Е. А. Николай Егорович Жуковский. Воспоминания и материалы к биографии. М.— Л., 1939 (о С. Ковалевской стр. 82—83).
19. Е. Ель (Литвинова Е.). — Из времени моего студенчества. Знакомство с С. В. Ковалевской. Женское дело, 1899, апрель, стр. 34—63.
20. Женское образование.— С. В. Ковалевская. 1891, № 2, стр. 213—217.
21. Жуковский Н. Е.— Механика в Московском университете за последнее 50-летие. Полное собр. соч., т. IX, стр. 203—211 (о С. Ковалевской, стр. 207—208).
22. Жуковский Н. Е.— О трудах С. В. Ковалевской по прикладной математике. С. В. Ковалевская, Мат. сборник, М., 1891, стр. 19—31. В полном. собр. соч. т. IX, стр. 299—310.
23. Звенья.— Сборник материалов и документов по истории литературы... XIX века. М. — Л., 1934, III—IV, 947 стр. (о С. Ковалевской стр. 588, 591, 593, 594, 604, 609—616).
24. Каган Вен.— С. В. Ковалевская. Воспоминания детства и автобиографические очерки (рецензия) Советская книга, 1946, № 8—9, стр. 88—90.
25. Кей Эллен.— Анна-Карлотта Леффлер. В книге А.-К. Леффлер „Софья Ковалевская". Спб., 1893, 315 стр. (о С. Ковалевской стр. 29—35, 41, 46, 66).
26. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX ст., перевод. М., 1937 (о С. Ковалевской стр. 336—338).
27. Книжки недели.— С. В. Ковалевская, биогр. очерк. 1891, № 7, стр. 117—124. Литературная летопись, 1892, № 10, стр. 202—207; № 11, стр. 200—204.
28. Книжник-Ветров Ив.—А. В. Корвин-Круковская (Жаклар), М., 1931, 115 стр.
29. Ковалевская С. В.— Письма 1868—1869, под ред. Кусковой Е. Д. Голос минувшего, 1916, № 2, стр. 226 — 240; № 3, стр. 213 — 231; № 4, стр. 77—94. Портрет С. К.
30. Софья Васильевна Ковалевская, проф. высшей математики. Автобиогр. рассказ, 29 мая 1890 г. Русская старина, 1891, ноябрь, т. 72, стр. 449 — 463.

31. Ковалевский Е. П. — Черты из жизни М. М. Ковалевского. Сборник „М. М. Ковалевский". Петр., 1917.
32. Ковалевский М. М. — Действенный феминизм. Биржевые ведомости, 1916, 1 и 2 марта. С. В. Ковалевская. Русские ведомости, 1916, 29 и 30 января.
33. Колтоновская Е. А. — С. В. Ковалевская. Речь, 1916, 29 января.
34. Колтоновская Е. А. — Женские силуэты. Спб., 1896. С. В. Ковалевская, стр. 3 — 23.
35. Корвин-Круковский Ф. В. — С. В. Корвин-Круковская, в замужестве Ковалевская. Русская старина, 1891, № 9, стр. 623—642, портрет С. К. 1868 года.
36. Космодемьянский А. А. — Очерки по истории теоретической механики в России. Ученые записки Москов. госуд. университета: Механика, т. II, 1948, вып. 132, стр. 193—296 (С. В. Ковалевская, стр. 244—247).
37. Кузнецов Б. Г. — Очерки истории русской науки. М. — Л., 1940, 171 стр. (о С. Ковалевской стр. 141 — 142).
38. Кускова Е. Д. — С. В. Ковалевская. Русские ведомости, 1916, 29 января.
39. Кускова Е. Д. — С. В. Ковалевская и ее время. Голос минувшего, 1916, № 2, стр. 215 — 225.
40. Лавров П. Л. — Русская развитая женщина. В память С. В. Ковалевской. Женева, 1891, 16 стр.
41. Лейбензон Л. С. — Н. Е. Жуковский (к столетию со дня рождения). АН СССР, М. — Л., 1947 (о С. Ковалевской 184 стр.).
42. Леффлер А.-К. — Софья Ковалевская (что я пережила с ней и что она рассказывала мне о себе). Перев. со шведского М. Лучицкой. Спб., 1893, 315 стр.
То же: Северный вестник, 1892, № 9, стр. 105—141; № 10, стр. 177—196; № 11, стр. 43 — 69; № 12, стр. 63 — 92. Также в Киевском сборнике в пользу пострадавшим от неурожая 1892.
43. Леффлер Фр. — На смерть С. В. Ковалевской, стихотворение. Пер. со шведского П. И. Вейнберга. Северный вестник, 1891, № 3. В книге А.-К. Леффлер „Софья Ковалевская", стр. 71 — 72, пер. Д. Михайловского.
44. Литвинова Е. Ф. — С. В. Ковалевская, ее жизнь и научная деятельность. Пб., 1894 (изд. Ф. Павленкова, Жизнь замечательных людей), 92 стр.
45. Лихачева Е. О. — Материалы для истории женского образования в России 1856—1880 гг. Спб., 1901, т. IV (о С. Ковалевской стр. 565 — 566).

46. Малевич И. И. Воспоминания (Софья Васильевна Ковалевская, д-р философии и профессор высшей математики, в „Воспоминаниях" первого, по времени, ее учителя И. И. Малевича 1858—1868 г.). Русская старина, 1890, № 12, стр. 615—654.
47. Математич. сборник, изд. Моск. мат. об-вом, — С. В. Ковалевская, М., 1891, т. XVI, стр. 7—55.
48. Математические и литературные труды С. В. Ковалевской, рожд. Корвин-Круковской, в 1874—1890 гг. Русская Старина, 1890, т. 68, ноябрь, стр. 581—583.
49. Мендельсон-Залесская М. — Воспоминания о С. Ковалевской. Перев. Л. Круковской. Современный мир, 1912, № 2, стр. 134—176 (с письмами С. К.).
50. Мерцалова М. Н. — С. В. Ковалевская, биографический очерк. Сборник „Движение твердого тела вокруг неподвижной точки", под ред. С. А. Чаплыгина и Н. И. Мерцалова. АН СССР, М. — Л., 1940, стр. 5—7.
51. Мечников И. И. — Этюды оптимизма. 4-е изд., М., 1917 г. 289 стр. (о С. В. Ковалевской стр. 200—201).
52. Миттаг-Леффлер Г. — Список математических сочинений Ковалевской. Русская старина, 1890, № 11, стр. 581—582.
53. Научное наследство. Т. I, М. — Л., 1948, АН СССР. Из переписки В. О. Ковалевского. Публикация С. Я. Штрайха, стр. 219 — 426.
54. Некрасов А. И. — С. В. Ковалевская. Энцикл. словарь т-ва бр. Гранат, т. 24, стр. 389 — 391, портр.
55. Некрасов П. А. — О трудах С. В. Ковалевской по чистой математике. Мат. сб., М., 1891, стр. 35—55.
56. Нива (журнал) — С. В. Ковалевская, ст. подп. П. В. Б., 1891, № 8, стр. 186—187.
57. Оболенский Л. Е. — Ковалевская и Башкирцева. Книжки недели, 1893, февр., стр. 148—167.
58. Памятник С. В. Ковалевской. — Новое время, 1896, № 7408, 11 окт.; 1900, № 8819, 15 сент.
59. Пантелеев Л. Ф. — Из жизни С. В. Ковалевской. Биржевые ведомости, 1916, 29 января.
60. Пантелеев Л. Ф. — Памяти С. В. Ковалевской. Речь, 1916, 29 января.
61. Пантелеев Л. Ф. — Из воспоминаний прошлого, М., 1934, 795 стр. (о С. В. Ковалевской на отдельных стр.).
62. Пикар Э. — О развитии за последние сто лет некоторых основных теорий математического анализа. Пер. С. Н. Бернштейна (Харьк. мат. библ. № 1, серия В). Харьков, 1912, 99 стр. (о С. Ковалевской стр. 38).

63. Поворинская В. — С. В. Ковалевская. Родник, 1900, № 6, стр. 607—616.
64. Погожев А. В.— 25-летие естественно-научных съездов в России (1861—1886). М., 1887 (о С. Ковалевской стр. 209).
65. Покровский К. Д.— Женщины-астрономы и их работы. Спб., 1897, 19 стр. (о С. Ковалевской стр. 15). Историч. вестник, 1897, июнь, стр. 761—779 (о С. Ковалевской стр. 775, 779).
66. Покровский П. М. — Карл Вейерштрасс. Вестник опытной физики и элемент. математики. Одесса, 1897, стр. 62—66 (о С. Ковалевской стр. 65).
67. Покровский П. М. — Памяти К. Вейерштрасса. Отчет и протоколы физ.-мат. о-ва при имп. Ун-те св. Владимира. Киев, 1898, стр. 63—74 (о С. Ковалевской стр. 65, 69, 73).
68. Протоколы VII съезда русских естествоиспытателей и врачей с 18 по 28 августа 1883 г. Одесса, 1883 (доклад С. Ковалевской 23 августа).
69. Речи и протоколы VI съезда русских естеств. и врачей в Петербурге с 20 по 30 декабря 1879 г. Спб., 1880 (доклад С. Ковалевской 28 декабря).
70. Ренстрем (перев.). — С. В. Ковалевская, женщина-профессор, перев. со швед. статьи из норвежской газеты „Северная звезда" (Nordstjernen, 1886, № 35, стр. 273—74). Русская старина, 1891, № 9, стр. 637—639.
71. Русские ведомости. — О С.В. Ковалевской. 1891, № 29, № 35, № 42; 1895, № 209; 1896, № 278, № 285; 1897, № 147, № 231, № 235.
72. Русская старина.— С. В. Корвин-Круковская, в замужестве Ковалевская. 1891, т. 71, сент., стр. 623—41.
73. Руссьян Ц. К.— С. В. Ковалевская (к 25-летию со дня смерти). Сообщения Харьковского матем. об-ва, 1917, т. XV, в. 2, стр. 161—176.
74. Семевский М. И. — Поездка по России в 1890 г. Русская старина, 1890, т. 68, № 12 (село Палибино — стр. 713—716).
75. Сенигов (ред). — С. В. Ковалевская, перевод со швед. из Illustrerad Tidning. 1884, № 32. Школа математики, 1885, № 1, стр. 1—4.
76. Слешинский И.— Некролог Вейерштрасса. Вестник опытной физики и элементарной математики, Одесса, 1897, стр. 59—62 (о С. Ковалевской стр. 61).
77. Слетова Вера. — Выдающийся математик. Советская женщина, 1946, № 2, стр. 55—56, портр.
78. Сонин П. Я. — Заметка по поводу письма П. Л. Чебышева к С. В. Ковалевской. Изв. Ак. Наук, 1895, т. II, № 1, стр. 18.
79. Столетов А. Г.— С. В. Ковалевская, биографический очерк. Матем. сборник, М., 1891, стр, 7—16. Собр. соч. М.—Л., 1941, т. II, стр. 259—266.

80. Столетов А. Г.— Русская женшина-математик С. В. Ковалевская Наука и жизнь, 1891, № 23, май, стр. 353—356.
81. Сыромятников С. Н. (Сигма).— Драма знаменитой женщины. Новое время, 1895, 21 апреля.
82. Тарасов Д. А.—Профессор С. В. Ковалевская. Русские ведомости, 1901, 30 января.
83. Таннери Поль.— Исторический очерк развития естествознания в Европе (1300—1900), перев. под ред. С. Ф. Васильева. М., 1934 (о С. Ковалевской стр. 223). ГТТИ.
84. Тимирязев К. А. — Собрание сочинений. М., 1937, т. IX (о С. Ковалевской стр. 29, 84, 85).
85. Тихомандрицкий М. — Карл Вейерштрасс. Сообщения Харьк. мат. о-ва. Харьков, 1897, т. VI, стр. 35—54 (о С. Ковалевской стр. 36, 54).
86. Филиппов Е. — С. В. Ковалевская. Детский отдых, 1893, № 1, стр. 78—103, портр.
87. Хвостов В. — Война и женский вопрос, Русские ведомости, 1916, 9 марта.
88. Штрайх С. Я.—Достоевский и сестры Корвин-Круковские. Красная новь, М., 1931, № 7, стр. 144.
89. Штрайх С. Я. —Сестры Корвин-Круковские. М., 1933, 342 стр., 2-е изд., М., 1934.
90. Штрайх С. Я. — Ковалевская о М. Е. Салтыкове. Литературное наследство, М., 1934, вып. 13—14, стр. 543—545.
91. Штрайх С. Я. — Русская нигилистка в Парижской Коммуне. Библ. Огонька. М., 1935, 48 стр.
92. Штрайх С. Я. — С. Ковалевская. Жизнь замечательных людей. М., 1935, 237 стр.
93. Штрайх С. Я.— Из переписки братьев Ковалевских. Советская наука, 1940, № 7, стр. 99—120.
94. Штрайх С. Я.— Гениальный русский палеонтолог В. О. Ковалевский. Успехи современной биологии, 1943, т. 16, вып. 1, стр. 87—102; то же, Новый мир, 1943, № 1, стр. 118—123; то же, Наука и жизнь, 1942, № 10, стр. 39—42.
95. Эфрос К. Е. — С. Ковалевская — драматург. Русские ведомости, 1916, 2 февраля.
96. Языков Д. Д.—Обзор жизни и трудов русских писателей и писательниц, Спб., 1909, вып. XI (С. Ковалевская, стр. 70—71).
97. Adelung Sophie.— Jugenderinnerungen an Sophie Kowalewsky. Deutsche Rundschau, 1896, Bd 89, December, S. 394—425.
98. Arvède Barine.— Rançon de la gloire. Revue des deux Mondes. Mai 1894, p. 348—382.

99. Astronomy and Astrophysics, S. Kovalevsky. 1892, 11 стр. 281—286. (указано в Catalogue of scient. papers 1884—1900, Cambridge 1918).
100. Bang Hermann. — Wanderjahr in seinen Briefen an Peter Nansen. Autor. Übers. v. Helene Klepetar, Wien, 1924.
101. Bjerknes C. A.— Fru Kowalevski og hendes Fortjenster of Videnskaps-Selskabets Möder i 1891 Christiania, стр. 7—20.
102. Bunsen Marie. — Sonja Kovalevsky. Eine biograph. Skizze. Westermanns illustrierte deutsche Monatshefte, 1897, Bd. 82, Mai. S. 218—232, портр.
103. Comptes rendus, Paris. Séance publique annuelle du lundi 24 décembre 1888, p. 1035—36, 1042 (о присуждении С. В. Ковалевской премии Бордена); séance 16 II 1891, p. 376 (извещение о смерти С. В. К.).
104. Du Bois-Reymond P. — О присуждении С. Ковалевской премии Бордена; статья в одной из берлинских газет. (Перевод в статье П. Н. Ариян [3].)
105. Galdeano Z. G.—Sofia de Kowalevsky. Progreso mat. 1891, 1, 88—90.
106. Hansson L. M. (Laura Marholm).— Six modern Women, Psycolog. Scetches. Trans. from the Germ. Boston, 1896, 213 p.
107. Hofer Klara. — Sonja Kowalewsky. Die Geschichte einer geistigen Frau. Stuttgart — Berlin, Gotta, 1927, 336 S.
108. Key Ellen. — Anne-Carlotte Leffler — Cajanello, Stockholm, 1893, 178 S., 3 portr.
109. Kerbedz E.— M-me de. Sophie de Kovalevsky. Rend. Circ. mat. Palermo, 1891, v. 5., p. 121—128. Bull. d. Sciences mathém. 1891, v. 15, p. 212—220.
110. Kovalevsky Maxime.— Tableau des origines et de l'évolution de la famille et de la propriété. Stockholm, 1890, 202 p. (Посвящение: A madame Sophie Kovalevsky.)
111. Les Kovalevsky. — Plaquette offerte à E. P. Kovalevsky à l'occasion de son jubilé scientifique, Paris, 1939, 21 p. (литогр.) (о С. Ковалевской стр. 18—20).
112. Kronecker L. — Sophie von Kowalevsky. Crelle, 1891, Bd 108, S. 88.
113. Krüger Th. — О Софье Ковалевской, глава, переведенная из воспоминаний Key Ellen, Anna-Carlotta Leffler, в журнале Frau 1895, Juli.
114. Lampe E.— Zum Gedächtnisse von Karl Weierstrass. Verh. d. Phys. Ges. zu Berlin. Leipzig, 1897, S. 50—71 (о С. Ковалевской стр. 67—68).
115. Leche-Löfgren Mia. — Vera för äldrars värld (Мир наших родителей), Stockholm, 1934. (Arskatalog for Svenska Bokhandeln, 1945.)

116. Leffler, Anna-Carlotta, di Cajanello.—Sonja Kovalevsky (по-шведски). Stockholm, Alb. Bonnier 1892, 190 s., 4 portr. То же по-немецки Dr. H. Lenk, 159 S.; то же по-английски Louise von Cossel. London, Walter Scott, 1895.
117. Leffler A.-C. — Sonya Kovalevsky. Annali di matematica, Milano, 1891, t. XIX, p. 201—211.
118. Linder Gurli. — Sällskapsliv i Stockholm under 1880 och 1890—talen (Общественная жизнь Стокгольма в 1880 — 1890 гг.). Nägra miunesbilder. Stockholm, Norstedt 1918, 175 S.
119. Mansion P. — Sophie Kowalewsky. Revue quest. scient. Bruxelles, 1891, t. 29, p. 595—598.
120. Marholm Laura. — Das Buch der Frauen. Paris—Leipzig, 1895. 5 Auflage, 1899, 204 S. Das Zeitopfer: Sonja Kowalewska, S. 149—204.
121. Mendelsonowa Marya. — Wspomnenia o Zofii Kowalewskiej. Krakow, 127 st. (с письмами С. К.).
122. Mittag-Leffler G. — Sophie Kovalevsky, Notice biographique. Acta math., 1892—1893, Bd 16, S. 385—392, портрет С. К.
123. Mittag-Leffler G. — Weierstrass et Sonja Kowalewsky. Acta math., 1923, Bd 39, S. 133—198.
124. Nature. 1890—91, XLIII. Professor Sophie Kovalevsky, стр. 375—376. То же.
125. Nordstjernen (норв. газета). Статья о С. Ковалевской, 1886, № 35, стр. 273—274.
126. Novarese H. — Sofia Kowalewski. Rivista di Matematica (de Peano). Torino. févr.-mars 1891, p. 21—22.
127. Picard E.— Revue annuelle d'Analyse. Revue générale des sciences pures et appliquées, 1-re année, № 22, 30 nov. 1890. Rend. d. Circ. mat. di Palermo, 1891, t. V, p. 80—90.
128. Picard E.— Sur le développement depuis un siècle de quelques théories fondamentales dans l'analyse mathématique. Paris, 1900, 90 c. (о С. В. Ковалевской стр. 33, 35). Paris 1905, 167 стр. (о С. В. Ковалевской стр. 44). См. также Revue générale des Sciences, 1900.
129. Picard, E.—La science moderne et son état actuel. Paris, 1908, 298 p. (о С. Ковалевской стр. 39).
130. Poincaré H. — Sur le problème des trois corps. Acta Math., 1890, t. 13 (о С. Ковалевской стр. 26—27).
131. Revue générale des sciences pures et appliquées. 1891, 28 févr., p. 128.
132. Retzius G. — Das Gehirn des Mathematikers Sonja Kovalevsky. Stockholm, 1900.
133. Szczawinskiej I. — Pamietnik Zofii Kowalewskiej. Przecklad Warshawa 1899, 321 стр. (Воспоминания детства С. В. К. и Воспоминания А.-К. Леффлер о С. К.)

134. Vollmar G. — S. Kovalevsky. Die neue Zeit, Stuttgart, 1891, IX Jahg., Bd I, № 1, S. 841—45.

135. Weierstrass K.—Briefe an L. Fuchs (Weierstrass und Sonja Kowalevsky). Jahresbericht d. Deutsch. Math. Vereinigung. 1909, Bd 18, № 2, S. 89—99. Acta math., 1923, Bd 39, S. 246—256.

136. Weierstrass K.— Briefe an Paul du-Bois-Reymond. Acta math., 1923, Bd 39, S. 199—225 (о С. Ковалевской стр. 204—205 и 223).

137. Wenguerow, Zénaide. — La femme russe. Revue des revues, 1897, № 18, p. 489—499.

Дополнительный список литературы о С. В. Ковалевской

(по „Источникам" С. Венгерова и другим справочникам)

Некрологи: 1) Волжский вестник, 1891, № 92. 2) Вестник Европы, 1891, № 3, общ. хрон. 3) Историч. вестник, 1891, т. 43, № 3. 4) Каспий, 1891, № 33. 5) Казанский бирж. листок, 1891, № 34. 6) Моск. иллюстрир. газета, 1891, № 21. 7) Моск. ведом., 1891, № 35. 8) Новое время, 1891, №№ 5360, 5361, 5368, 5374. 9) Русск. мысль, 1891, № 2, 258, внутр. обозр. 10) Смоленский вестник, 1891, № 14. 11) Саратовск, листок, 1892, № 211. 12) Орловский вестник, 1896, № 248. 13) Волынь, 1897, № 161. 14) Ист. вестник, 1897, т. 77, т. 78. 15) Сарат. листок, 1897, № 188. 16) Спб. вед., 1897, № 245. 17) Русский архив, 1898, восп. Стерлиговой. 18) Волжский вестн. (Всев. Михалевич), 1899, № 40, № 80. 19) Stockholms Dagblad, 1891, 15 февр. 20) Frau, 1895, июль. 21) Leopoldina, Halle 1891, H. 27, № 5—6, стр. 59—60. 22) Wszechswiat, 1891, 127—128.

Отзывы: О „Воспоминаниях детства" (1890): 1) Русская мысль, 1890, № 8, библ. отд., стр. 393; № 9, стр. 442—444; 1891, № 2, библ. отд., стр. 117—118; 1892, № 4, библ. отд., стр. 194. 2) Сев. вестн., 1890, № 12, лит. зам. „О Литературных сочинениях" (1893). 3) Вестник Европы, 1893, № 2, стр. 889—94, лит. обозр.

Рецензия на сборник „О вращении твердого тела". Вестник Акад. Наук СССР, 1941, № 4, стр. 106.



ПОСЛЕСЛОВИЕ

Еще в 1916 году, в связи с двадцатипятилетием со дня смерти С. В. Ковалевской, проф. А. В. Васильев сказал, что лучшим памятником Ковалевской было бы издание ее научных работ на русском языке.

В 1940 году, перед предстоявшим пятидесятилетием со дня смерти С. В. Ковалевской, в издании Академии Наук СССР появился перевод основных работ С. В. Ковалевской в сборнике „О вращении твердого тела", вышедшем под редакцией С. А. Чаплыгина и Н. И. Мерцалова, чем было положено начало осуществлению этого пожелания.

В настоящем сборнике представлены все научные работы С. В. Ковалевской.

Переводы, сделанные П. Я. Кочиной, Ц. О. Левиной и Л. А. Телешевой, близки к подлинникам и не подвергались литературной обработке. Формат настоящего издания вызвал в некоторых местах изменение в расположении, а в одном оговоренном случае и в написании, очень длинных формул, встречающихся в работах С. В. Ковалевской.

В конце сборника прилагается перевод писем К. Вейерштрасса, содержащих его оценку работ и способностей С. В. Ковалевской. Эти письма переведены Е. О. Вильдт.

И. Г. Петровский и Н. Г. Четаев прочитали, по моей просьбе, некоторые части примечаний и сделали ряд указаний, принятых мною. Многочисленные советы, по всем разделам книги, получены мною от Н. А. Талицких, которому принадлежит ведущее редактирование по книге. Сотрудницы Института механики Академии Наук СССР М. М. Семчинова и Н. Ф. Каретникова оказывали мне разнообразную помощь при печатании книги. Всем этим лицам приношу живейшую благодарность.

П. Полубаринова-Кочина



ОГЛАВЛЕНИЕ

1. К теории уравнений в частных производных, *перевод Л. А. Телешевой* 7

2. О приведении некоторого класса абелевых интегралов 3-го ранга к эллиптическим интегралам, *перевод П. Я. Кочиной* 51

3. О преломлении света в кристаллических средах, *перевод Ц. О. Левиной* 75

4. О распространении света в кристаллической среде, *перевод П. Я. Кочиной* 136

5. Дополнения и замечания к исследованию Лапласа о форме кольца Сатурна, *перевод Ц. О. Левиной* 139

6. Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки, *перевод П. Я. Кочиной* 153

7. Об одном свойстве системы дифференциальных уравнений, определяющей вращение твердого тела около неподвижной точки, *перевод П. Я. Кочиной* 221

8. Мемуар об одном частном случае задачи о вращении тяжелого тела, *перевод П. Я. Кочиной* 235

9. Об одной теореме г. Брунса, *перевод П. Я. Кочиной* 245

ПРИЛОЖЕНИЯ

I. К статье 1 „К теории уравнений в частных производных.“ . 257

II. К статье 2 „О приведении . . . абелевых интегралов.“ . . . 261

III. К статьям 3 и 4 „О преломлении . . .“ и „О распространении света в кристаллических средах“ 279

IV. К статье 5 „. . . о форме кольца Сатурна.“ 284

V. К статьям 6, 7 и 8 „. . . о вращении твердого тела . . .“ . . . 285

Список научных работ С. В. Ковалевской 311
Курсы, прочитанные С. В. Ковалевской в Стокгольмском университете 312
Софья Васильевна Ковалевская. *П. Я. Полубариновой-Кочиной* 313
Письма Вейерштрасса Фуксу о Софье Ковалевской, *перевод Е. О. Вильдт* 343
Основные даты жизни и деятельности С. В. Ковалевской 353
Литературные работы С. В. Ковалевской 355
Литература о С. В. Ковалевской 357
Послесловие 366

Печатается по постановлению Редакционно-издательского совета Академии Наук СССР

Редактор издательства *Н. А. Талицких.* Технический редактор *Е. Н. Симкина*
Корректор *Л. К. Николаева*

РИСО АН СССР № 3217. А-11825. Издат. № 1664. Тип. заказ № 1090.
Подп. к печ. 27/XI 1948 г. Формат бум. 70×92 1/16. Печ. л. 23 + 2 вклейки
Уч.-издат. 23. Тираж. 5000. Цена в переплете 22 р. 50 к.

2-я тип. Издательства Академии Наук СССР. Москва, Шубинский пер., д. 10



Софья Ковалевская



С. В. КОВАЛЕВСКАЯ

(*Работа скульптора Вальтера Рунеберга*)

С.В.КОВАЛЕВСКАЯ

НАУЧНЫЕ РАБОТЫ



